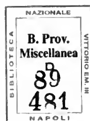

FONDO PIZZOFALCONE


NAZIONALE
BIBLIOTECA
B. Prov.
Miscellanea
89
481
VITTORIO EM. III
NAPOLI


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine

ESSAI

SUR

LE MOUVEMENT DES EAUX COURANTES,

ET LA FIGURE QU'IL CONVIENT DE DONNER

AUX CANAUX QUI LES CONTIENNENT.

ESSAI

SUR

LE MOUVEMENT DES EAUX COURANTES,

ET LA FIGURE QU'IL CONVIENT DE DONNER

AUX CANAUX QUI LES CONTIENNENT;

PAR P. S. GIRARD,

Ingénieur en chef des ponts et chaussées, membre de l'Institut d'Égypte.



.... Quid nobis certius ipsis
Sensibus esse potest, quo vera ac falsa notemus!
TIT. LUCRET. *de Naturâ rerum*, lib. I.



A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE LA RÉPUBLIQUE.

An XII = 1804 *(v. s.)*.

AVERTISSEMENT.

AVANT la découverte des lois du mouvement accéléré des graves, il était naturel de penser qu'un mobile abandonné à son propre poids devait descendre le plus promptement possible d'un point à un autre, en suivant le plus court chemin entre ces deux points, c'est-à-dire, en décrivant une ligne droite, soit que ces deux points fussent situés dans la même verticale, ou non.

L'immortel auteur de cette découverte reconnut bientôt que la ligne de la plus vîte descente d'un point à un autre n'était pas la plus courte distance que l'on pût mesurer entre eux; mais s'étant borné à comparer les temps de la chute des graves par des arcs de cercle et par les cordes de ces arcs, et ayant démontré que ce temps était moindre par un arc quelconque, que par les côtés successifs de tout polygone inscrit entre ses extrémités, il en conclut généralement que la ligne de la plus vîte descente était une portion de cercle.

Cependant, de ce qu'un corps grave parcourt une portion de cercle en moins de temps qu'il n'en emploierait à

parcourir tout polygone qui lui serait inscrit, il ne s'ensuit pas que le temps de la chute par un arc circulaire soit moindre que par l'arc de toute autre courbe tracé entre les deux mêmes extrémités. La conclusion de *Galilée* était donc évidemment hasardée, et la ligne de *la plus vîte descente* restait encore à déterminer, lorsque, soixante ans après la publication de ses dialogues, les deux frères Jean et Jacques *Bernoulli*, *Newton*, *Leibnitz* et le M.is *de l'Hôpital*, démontrèrent que cette ligne était un arc de cycloïde.

La question de la *brachystochrone*, analogue en quelque sorte à celle que nous avons essayé de résoudre, offre un exemple notable de la marche de l'esprit humain dans les mathématiques, et leur application à la physique.

Galilée reconnut le premier qu'en vertu des lois de la gravitation, il devait exister une courbe de plus vîte descente; mais l'instrument propre à la déterminer manquait à son génie : il fallut, pour y parvenir, que *Newton* et *Leibnitz* eussent inventé le calcul infinitésimal. Ainsi, dès que le mouvement fut devenu l'objet d'une science nouvelle, on s'aperçut que les progrès de cette science étaient essentiellement dépendans de ceux de l'analyse, et de la perfection de ses méthodes.

Les géomètres célèbres dont les travaux honorent notre siècle, ont, en effet, réduit à des questions de calcul toutes

les questions relatives au mouvement des corps; mais leurs découvertes sont encore trop récentes pour qu'il en ait été fait à la pratique des arts qui en sont susceptibles, autant d'applications utiles qu'on est fondé à en attendre lorsqu'elles seront plus universellement répandues.

L'art des constructions hydrauliques est celui qui réclame ces applications avec le plus d'instance, et dans lequel l'occasion de les faire se présente le plus fréquemment. L'Essai que je publie a pour objet spécial une de ces applications. J'ose espérer que le succès la justifiera dans l'exécution des canaux de dérivation, et que les ingénieurs habiles me sauront gré d'avoir entrepris d'éclairer du flambeau de la théorie une matière qui, n'ayant point fait encore l'objet de leurs recherches, paraît avoir été jusqu'à présent abandonnée aux tâtonnemens de la pratique.

ESSAI

ESSAI



SUR

LE MOUVEMENT DES EAUX COURANTES,

ET LA FIGURE QU'IL CONVIENT DE DONNER

AUX CANAUX QUI LES CONTIENNENT.

1. LES eaux qui coulent à la surface de la terre, exercent sur les parois de leurs lits une certaine action.

Définition du *régime permanent* du lit des fleuves. Comment il s'établit.

2. PAR l'effet de cette action, la figure et la direction du lit des fleuves éprouvent des changemens successifs, jusqu'à ce que l'équilibre s'établisse à chaque point de leur cours entre l'action dont il s'agit, et la résistance que lui oppose en ce point la ténacité du sol dans lequel le lit est creusé.

3. LORSQUE cet équilibre existe, *le régime au fleuve est permanent*, c'est-à-dire que sa pente et sa direction demeurent fixes dans cet état, comme si les parois de son lit n'étaient plus susceptibles d'être corrodées ; et alors la quantité d'eau qui s'écoule à chaque instant par une section transversale quelconque, est constante.

4. SI maintenant quelque circonstance vient troubler *ce régime permanent* ou cet état d'équilibre, soit qu'on augmente ou qu'on diminue le développement du lit du fleuve, soit qu'on le rende plus large ou plus étroit, soit enfin qu'on altère sa pente naturelle par des barrages ou autres obstacles, ces modifications locales en produiront de plus ou moins sensibles dans toute l'étendue de son

cours, et le lit modifié ne parviendra à un nouvel état de permanence, qu'après avoir éprouvé de nouveaux changemens dépendans de ceux qu'on lui aura d'abord fait subir.

5. On ne s'est point occupé jusqu'à présent de rechercher la loi suivant laquelle ces changemens s'opèrent. On sait seulement que les matières provenant de la corrosion des rives du fleuve, dans quelques endroits, vont se déposer plus loin, là où le courant n'est plus animé d'une assez grande vîtesse pour les tenir suspendues; de sorte qu'en se formant de nouvelles parois de substances rapportées, ou en corrodant ses anciennes rives, le fleuve établit son nouveau lit, dont, après un certain temps, le régime devient *permanent.*

6. La plupart de nos fleuves et de nos rivières, qui n'éprouvent aujourd'hui aucun changement notable dans les dimensions et les sinuosités de leur lit, sont arrivés à cet état de permanence; mais ce n'est qu'après avoir sillonné en différens sens les vallées où ils coulent, comme on s'en aperçoit par les traces qu'ils ont laissées de leur passage.

La pente des courans d'eau dont le régime est permanent, n'est point uniforme.

7. En suivant le cours de ces fleuves, on remarque que leur pente n'est point uniforme, mais qu'elle diminue de plus en plus depuis leur source jusqu'à leur embouchure; c'est-à-dire, que le fond de leur lit présente, dans sa longueur, une surface courbe concave, ayant pour plan tangent à son extrémité inférieure un plan parallèle à l'horizon.

8. Par conséquent, ne considérant ici que la pente, et faisant abstraction de toutes les circonstances qui, combinées entre elles, constituent *la permanence du régime*, on doit conclure du fait généralement reconnu qui vient d'être rapporté, que le décroissement de la pente des fleuves, suivant une certaine loi depuis leur source jusqu'à leur embouchure, est une des conditions nécessaires à la stabilité de leur lit.

9. Si, par exemple, l'on suppose un canal rectangulaire, creusé

dans un terrain homogène, sa section longitudinale, par un plan perpendiculaire à l'horizon, devra présenter une certaine courbe dont la propriété sera telle, que les eaux mises en mouvement dans ce canal, y couleront avec une vîtesse uniforme, sans dégrader ses rives ni changer la figure actuelle de son fond.

10. LA détermination rigoureuse de cette courbe conduirait donc au perfectionnement de l'architecture hydraulique, puisque l'on pourrait immédiatement donner aux canaux destinés à contenir des eaux courantes, la forme que la nature tend sans cesse à leur donner, et qui leur convient essentiellement; on préviendrait par-là les accidens auxquels on est exposé, lorsque leur pente est distribuée au hasard: car alors les sections du courant varient plus ou moins d'un point à un autre; d'où résulte le gonflement ou la dépression de sa surface, là où il convenait de la tenir à une hauteur déterminée.

Cas dans lesquels il importe plus ou moins de régler la pente des canaux artificiels, suivant la loi de décroissement indiquée par la nature.

11. A LA VÉRITÉ, il n'est pas toujours également important de régler les pentes des canaux artificiels avec autant de précision. Si l'on a, par exemple, un canal de desséchement à creuser dans une vallée, on peut sans inconvénient se borner à en dresser le fond de manière à procurer de l'écoulement aux eaux qu'il reçoit, et laisser ces eaux exercer librement leur action sur les parois de leur lit, jusqu'à ce que la nature l'ait elle-même réglé de la manière la plus avantageuse.

12. MAIS lorsqu'il s'agit d'amener des eaux par un canal de dérivation qu'on est forcé de soutenir sur le penchant de collines plus ou moins escarpées, il est évident que l'action continuelle de la gravité tendant à faire descendre ces eaux dans la vallée au-dessus de laquelle elles coulent, la rive qui leur sert d'appui du côté de cette vallée, sera attaquée avec d'autant plus d'énergie, et par conséquent d'autant plus exposée à des ruptures dangereuses, que la figure du canal s'éloignera davantage de celle que la nature lui aurait donnée, si elle l'avait elle-même creusé; c'est donc alors qu'il convient d'anticiper, en quelque sorte, sur son ouvrage, en

profitant, pour arriver au même but qu'elle se propose, de toutes les lumières que l'expérience et la théorie nous fournissent.

13. CES considérations m'ont déterminé à rechercher la loi suivant laquelle il convenait de régler les pentes du canal de l'Ourcq, dont l'exécution m'est confiée.

En quoi consiste la perfection qu'on peut atteindre par la détermination de cette loi.

14. EN rendant compte de mon travail à l'Institut, je suis loin de penser qu'il existera toujours un accord rigoureux entre les résultats auxquels le raisonnement m'a conduit, et ceux que l'observation fera connaître. Le lit d'un canal creusé dans un terrain qui varie de consistance d'un endroit à un autre, ne conservera pas précisément la figure indiquée par une théorie où l'on fait abstraction de cette variabilité du sol : mais les changemens qu'il éprouvera seront les moindres possible; et, dans l'état actuel de nos connaissances, c'est en quoi consiste toute la perfection que l'on peut espérer d'atteindre.

15. AU RESTE, si la question dont il s'agit n'est susceptible que d'une solution approchée, cette difficulté lui est commune avec la plupart de celles qu'on entreprend de résoudre par l'application du calcul à la physique ; et comme les derniers progrès de cette science sont dus sur-tout à cette application, les tentatives auxquelles on se livre pour soumettre à l'analyse géométrique les différens phénomènes du mouvement des corps, semblent mériter d'autant plus d'être accueillies avec indulgence, qu'elles tendent vers un but plus utile, et que la matière qui en est l'objet présente de plus grandes difficultés.

16. JE vais exposer succinctement les observations qui m'ont conduit à proposer une nouvelle théorie du mouvement des eaux courantes. J'en développerai les propositions fondamentales, et j'en comparerai les résultats à ceux des expériences qui, jusqu'à présent, ont été faites avec le plus d'exactitude sur l'écoulement des eaux dans les tuyaux de conduite.

Observations sur lesquelles la Théorie est fondée.

Des ondulations qui ont lieu à la surface d'un fluide stagnant.

17. QUAND on applique une certaine force à la surface d'un fluide pesant, on remarque que cette surface se modifie et oscille pendant un certain temps, en présentant une suite d'ondulations qui se succèdent plus ou moins rapidement, et dont la limite se rapproche plus ou moins de leur origine, suivant la nature du fluide agité et la forme du vase dans lequel il est contenu.

18. C'EST ce qui arrive, lorsqu'on laisse tomber un corps grave sur la surface de l'eau, ou qu'on dirige un courant d'air sur l'un quelconque de ses points.

19. CETTE succession d'ondulations dans une direction perpendiculaire à celle de la pesanteur, produit ordinairement sur notre vue une illusion qui la trompe, quand on ne jette sur le phénomène dont il s'agit qu'un coup-d'œil peu attentif.

20. LES ondulations qui couvrent la surface du fluide paraissent, en effet, imprimer à cette surface une certaine vîtesse horizontale, comme si la même molécule était animée d'un mouvement progressif, dans une direction perpendiculaire à celle de sa gravité ; tandis que cette molécule n'a véritablement qu'un mouvement oscillatoire, en vertu duquel elle s'élève et s'abaisse successivement comme la surface de l'eau dans des tubes recourbés; mouvement analogue à celui des pendules, et dont les circonstances dépendent de la hauteur et de l'amplitude des ondes.

21. L'IMMOBILITÉ horizontale de la surface fluide ainsi agitée, se prouve évidemment par celle des corps flottans dont elle peut être couverte. L'expérience indique en effet que ces corps n'ont aucun mouvement progressif, si le fluide qui les soutient était lui-même sans mouvement, lorsque la force extérieure qui le fait osciller, a commencé d'exercer son action.

Analogie entre ces ondulations et celles d'un tissu flexible

22. C'EST ainsi que lorsqu'une chaîne flexible et pesante est suspendue par ses extrémités, et reçoit une impression verticale, il se

retenu fixe entre ses extrémités.

manifeste sur toute sa longueur des ondulations successives qui produisent une illusion semblable à celle que nous avons indiquée, en faisant paraître cette chaîne comme animée d'un mouvement progressif, dirigé de l'une de ses extrémités à l'autre, quoique ces extrémités soient fixes.

23. L'ANALOGIE est bien plus frappante encore entre les ondulations de la surface d'un fluide et celles d'un tissu flexible, tel qu'une toile ou une étoffe quelconque. On sait, en effet, qu'en agitant verticalement ce tissu entre ses deux extrémités, les ondulations qui se manifestent par cette agitation, semblent courir dans la même direction comme les vagues de la mer.

24. SI les oscillations de la surface d'un fluide et celles d'un tissu flexible produisent le même effet sur nos sens en les abusant de la même erreur, c'est parce que le fluide et le tissu ont une propriété commune, qui, dans le mouvement particulier imprimé à l'une et à l'autre de ces substances, se manifeste à l'exclusion des autres propriétés par lesquelles ces substances sont essentiellement caractérisées.

Les fluides peuvent être considérés comme doués d'une flexibilité parfaite.

25. OR la flexibilité est évidemment cette propriété commune : elle consiste en effet en ce que les corps qui en sont doués peuvent changer de figure sous le plus léger effort, sans que leurs parties se désunissent ; donc, puisque les fluides ont la faculté d'affecter ainsi toutes sortes de formes en remplissant exactement les vases qui les contiennent, il s'ensuit qu'on doit les considérer comme doués d'une flexibilité parfaite.

État de la question.

26. EN envisageant sous ce point de vue les fluides qui se meuvent dans des canaux de figure quelconque, on parviendra à déterminer les circonstances de leur mouvement, si l'on détermine les circonstances de celui d'une chaîne pesante dont les élémens sont incompressibles, et qui, éminemment flexible en tout sens, est assujettie à se mouvoir sur une surface courbe déterminée.

27. AINSI la question dont il s'agit se réduit naturellement à une question de dynamique, et peut être traitée par les principes de cette science, sans qu'on ait besoin de recourir à ceux du parallélisme des tranches, de l'égalité de pression, ou de la conservation des forces vives, dont la plupart des géomètres ont fait usage pour résoudre les différens problèmes relatifs au mouvement des eaux.

Du Mouvement d'une Chaîne pesante sur une surface quelconque.

28. SUPPOSONS d'abord deux corps pesans m et m' liés par un fil flexible et inextensible, soutenus sur une surface quelconque, et abandonnés à l'action de la gravité g.

Expression de la force accélératrice de deux corps graves liés entre eux par un fil, et soutenus sur une surface quelconque.

Nommons x, y, z les coordonnées du premier corps,

x', y', z' les coordonnées du second rapportées à trois plans perpendiculaires entre eux.

Si l'on suppose l'axe des z parallèle à la direction de la gravité, il est évident que la force accélératrice du premier corps, s'il était libre de se mouvoir indépendamment du second, serait

$$\frac{g\,dz}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}};$$

et que la force accélératrice du second, s'il était indépendant du premier, serait

$$\frac{g\,dz'}{\sqrt{(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)}}.$$

Nommons Φ la force accélératrice commune dont ils sont animés en vertu de leur dépendance mutuelle, on aura, suivant le principe de dynamique donné par d'Alembert,

$$m.\left(\frac{g\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}} - \Phi\right) + m'.\left(\frac{g\,dz'}{\sqrt{(dx'^2+dy'^2+dz'^2)}} - \Phi\right) = 0;$$

d'où l'on tire

$$\Phi = \frac{g}{m+m'}\left(\frac{m\,dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}} + \frac{m'\,dz'}{\sqrt{(dx'^2+dy'^2+dz'^2)}}\right);$$

ou, pour plus de simplicité, en appelant s et s' les arcs des courbes à double courbure décrits par chacun des corps m et m',

$$\Phi = \frac{g}{m + m'}\left(\frac{m\,dz}{ds} + \frac{m'\,dz'}{ds'}\right).$$

Force accélératrice de trois corps liés entre eux de la même manière.

29. **Supposons** maintenant un troisième corps m'' attaché au second, comme celui-ci l'est au premier; nommons x'', y'', z'' ses coordonnées, et s'' l'arc de la courbe à double courbure sur laquelle il se meut; soit enfin Φ' la force accélératrice commune aux trois corps m, m', m'', nous aurons, par le même principe que nous avons déjà employé,

$$(m + m')\left[\frac{g}{m + m'}\left(\frac{m\,dz}{ds} + \frac{m'\,dz'}{ds'}\right) - \Phi'\right] + m''\left(\frac{g\,dz''}{ds''} - \Phi'\right) = 0;$$

ce qui donne

$$\Phi' = \frac{g}{m + m' + m''}\left(\frac{m\,dz}{ds} + \frac{m'\,dz'}{ds'} + \frac{m''\,dz''}{ds''}\right).$$

Ce qu'elle devient, lorsque le nombre des corps est indéfini.

30. **En général**, si l'on suppose un nombre n de corps, et que l'on appelle (Φ) leur force accélératrice commune, on aura

$$(\Phi) = \frac{g}{m + m' + m'' + m''' + \ldots m_{(n-1)}}\left(\frac{m\,dz}{ds} + \frac{m'\,dz'}{ds'} + \frac{m''\,dz''}{ds''} + \frac{m'''\,dz'''}{ds'''} + \ldots \frac{m_{(n-1)}\,dz_{(n-1)}}{ds_{(n-1)}}\right).$$

Lorsqu'ils forment une chaîne de grosseur uniforme.

31. **Lorsque** les fils qui retiennent entre eux les corps m, m', m'', &c. sont infiniment courts, c'est-à-dire, lorsque ces corps sont contigus, et qu'ils sont assujettis à se mouvoir sur une courbe à double courbure, tracée sur une surface quelconque, les différentielles dz, dz', dz'', &c. ds, ds', ds'', &c. appartiennent aux ordonnées verticales consécutives et aux arcs correspondans de cette courbe; de sorte que nommant M la portion de chaîne formée des élémens m, m', m'', &c. on a généralement $m = dM$, et la formule précédente se réduit à celle-ci :

$$(\Phi) = \frac{g}{\int dM + A}\left(\int \frac{dM\,dz}{ds} + B\right).$$

32. **Faisons** dM proportionnel à ds, ou la chaîne d'une grosseur uniforme, nous aurons

$$\Phi = g\left(\frac{z + B}{s + A}\right);$$

expression

expression de la force accélératrice qui anime une portion de chaîne pesante mise en mouvement sur une courbe quelconque.

33. On voit que cette expression de la force accélératrice convient également, soit que le mouvement ait lieu sur une courbe à double courbure, ou sur une courbe plane : mais dans le premier cas,

$$s = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)};$$

et dans le second,

$$s = \int \sqrt{(dx^2 + dz^2)}.$$

Ainsi nous nous bornerons à examiner celui-ci ; et les résultats auxquels nous parviendrons, s'appliqueront immédiatement à celui-là.

34. Il s'agit d'abord de déterminer les constantes A et B d'après les conditions de la question.

Qu'on se propose par exemple de trouver la valeur de (Φ) pour une portion de chaîne supposée en $M\,N$ sur la courbe matérielle donnée $AMNC$ (*fig. 1.re*).

Faisons l'ordonnée PN correspondante au chaînon inférieur $= z'$, l'arc CN de la courbe auquel cette abscisse est appliquée $= s'$; il est clair que les constantes A et B seront telles, que l'on aura

$$z' + B = o$$
$$s' + A = o,$$

et par conséquent

$$(\Phi) = g\left(\frac{z - z'}{s - s'}\right).$$

35. Expression complète lorsque z et s représentent l'ordonnée et l'arc de la courbe correspondans au chaînon supérieur. Mais Δ étant la notation des différences finies, on a $z - z' = \Delta z$, $s - s' = \Delta s$. On peut donc mettre l'équation précédente sous cette forme,

$$(\Phi) = g\,\frac{\Delta z}{\Delta s};$$

laquelle, en supposant la chaîne infiniment courte, devient

$$(\Phi) = g\,\frac{dz}{ds},$$

B

comme on le trouve pour la force accélératrice d'un corps solide dont la masse est réunie toute entière à son centre de gravité et qui se meut sur une courbe quelconque.

36. Si dans l'équation $(\Phi) = g \frac{z - z'}{s - s'}$ on suppose que les quantités z et z', s et s' soient les abscisses et les arcs correspondans aux extrémités A et C de la courbe, on aura évidemment z' et s' égaux à zéro; ce qui donne

$$(\Phi) = g \frac{z}{s}$$

pour la force accélératrice d'une chaîne pesante étendue sur toute la longueur d'une courbe matérielle donnée.

37. Si l'on conçoit que cette chaîne prolongée au-delà du sommet A soit soutenue sur toute la longueur d'une courbe AC' ayant son extrémité inférieure C' sur la même horizontale que l'extrémité C de la première, il est évident qu'en nommant (Φ') la force accélératrice dont la portion AC' de la chaîne est animée, et s' la longueur de la courbe sur laquelle elle s'appuie, on aura

$$(\Phi') = g \frac{z}{s'}.$$

Loi de l'équilibre d'une chaîne pesante soutenue sur une surface courbe entre deux plans horizontaux.

38. Les momens des deux portions de la chaîne que nous supposons descendre de part et d'autre du point A sur les courbes AC et AC' sont, comme on sait, égaux aux produits de leurs forces accélératrices par leurs masses respectives, lesquelles, à cause de la grosseur uniforme de la chaîne, sont ici proportionnelles aux longueurs s et s'.

Le moment de la portion AC est donc

$$(\Phi) s = gz;$$

et celui de la portion AC'

$$(\Phi') s' = gz$$

Donc, à cause de l'égalité de ces momens, il y a équilibre entre les deux portions de la chaîne AC et AC'; et cet équilibre existe,

soit que les deux courbes enveloppées par la chaîne aient tous leurs points dans un même plan, ou qu'elles soient à double courbure, soit qu'on les suppose ou non assujetties à la loi de continuité.

39. DONC, si l'on conçoit une surface courbe quelconque soutenue sur un plan horizontal, et que par le sommet de cette surface on applique sur elle une chaîne pesante d'une grosseur uniforme, les deux portions de cette chaîne qui descendront de part et d'autre du sommet de la surface courbe jusqu'au plan horizontal qui lui sert de base, se feront mutuellement équilibre, de quelque manière qu'on les suppose d'ailleurs se développer sur la surface dont il s'agit; proposition tout-à-fait générale, et dont le théorème de *Stevin* n'est qu'un cas très-particulier.

40. JE reprends maintenant la formule

Ce que devient la force accélératrice de la chaîne, lorsque $z = s$, et $z = o$.

$$(\Phi) = g\frac{z}{s},$$

et j'observe, 1.° que les deux suppositions de $z = s$, et de $z = o$, dont la première exprime le cas où la chaîne glisse le long d'une droite verticale, et dont la seconde convient à celui où elle est soutenue sur une droite horizontale, donnent l'une $(\Phi) = g$, et l'autre $(\Phi) = o$; ce qui est d'ailleurs évident.

41. J'OBSERVE en second lieu que cette force accélératrice $(\Phi) = g.\frac{z}{s}$ sera constante tant que les quantités z et s resteront les mêmes. Si donc on conçoit que le chaînon antérieur au moment même qu'il dépasse l'extrémité inférieure C de la courbe matérielle sur laquelle le mouvement a lieu, s'anéantisse tout-à-coup, et soit remplacé au même instant par un chaînon égal, qui, animé précisément de la même vîtesse que le chaînon anéanti, entre sur cette courbe par son extrémité supérieure A, les circonstances du mouvement de la chaîne, ainsi formée d'élémens successifs, seront précisément les mêmes que celles du mouvement uniformément

Cette force est constante, lorsque la chaîne mobile est composée de chaînons successifs.

varié ; ce qui nous dispense de nous occuper d'une recherche dont les résultats n'offriraient aucune particularité nouvelle.

Analogie entre cette chaîne et un fluide en mouvement dans un canal ou tuyau de conduite.

42. MAIS, si l'on considère la courbe *AC* comme un canal ou tuyau de conduite au moyen duquel un fluide incompressible et pesant s'écoule d'un réservoir supérieur entretenu constamment plein, dans un réservoir inférieur dont l'état est aussi permanent, il est évident d'abord que la vîtesse du fluide sera constante en un instant quelconque dans toute la longueur du canal ou tuyau de conduite supposé prismatique ou cylindrique, puisque le fluide dont il est plein est incompressible : il est évident ensuite qu'en vertu de la liaison réciproque des molécules élémentaires de ce fluide, liaison qui constitue son extrême flexibilité, il se mouvra dans le canal ou tuyau de conduite, précisément comme la chaîne pesante à chaînons successifs, se meut sur la courbe *AC;* et cette identité sert de base à la théorie des eaux courantes, que nous nous proposons de développer.

Recherche de la force accélératrice d'une chaîne à chaînons successifs, en ayant égard au frottement.

43. NOUS avons vu que, si une chaîne parfaitement flexible, et dont tous les chaînons se renouvellent successivement, n'éprouvait aucun obstacle à se mouvoir sur la courbe qui la soutient, sa vîtesse s'accélérerait uniformément, comme celle des corps graves dans leur chute : mais, puisqu'il n'existe aucune surface parfaitement polie, la pression normale que chacun des chaînons exerce sur l'élément correspondant de la courbe matérielle, occasionne un frottement qui modifie la force accélératrice de la chaîne.

Pour déterminer généralement la loi suivant laquelle cette modification s'opère, je reprends l'hypothèse faite art. 28, et je considère deux corps m et m' liés entre eux par un fil flexible et inextensible, abandonnés à l'action de leur gravité, sur une surface courbe quelconque.

Les coordonnées rectangles de ces corps sont $x, y, z; x', y', z';$

Le rapport du frottement à la pression $=f.$

Cela posé, si par le lieu du premier corps m sur cette surface,

et par le lieu infiniment voisin qu'il occupe dans l'instant suivant, on fait passer un plan vertical, ce plan coupera la surface donnée suivant un des élémens de la courbe à double courbure décrite par le corps m ; et l'on trouve aisément que l'action de la gravité décomposée perpendiculairement à cet élément, a pour expression

$$g\,\frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + d\zeta^2)}}\,.$$

De plus, si l'on nomme u la vitesse actuelle du mobile le long de la courbe qu'il décrit, r le rayon de courbure correspondant au point qu'il occupe, la force centrifuge dont il sera animé en ce point sera $\pm\frac{u^2}{r}$, selon que le mouvement a lieu sur la concavité ou la convexité de la courbe.

On aura donc pour la pression normale entière,

$$g\,\frac{\sqrt{(dx^2 + dy)}}{\sqrt{(dx^2 + dy + d\zeta^2)}} \pm \frac{u^2}{r}\,;$$

et par conséquent, pour le frottement qui en résulte,

$$f.\left(g\,\frac{\sqrt{(dx^2 + dy)}}{\sqrt{(dx + dy^2 + d\zeta^2)}} \pm \frac{u^2}{r}\right) = f.\left(g\,\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{u^2}{r}\right),$$

en faisant $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = d\sigma$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + d\zeta^2)} = ds$.

Le frottement qu'éprouve le second corps m' sera de même

$$f\left(g\,\frac{d\sigma'}{ds'} \pm \frac{u'^2}{r'}\right);$$

expression qui doit toujours être affectée du signe négatif, puisque le frottement est, de sa nature, une force essentiellement retardatrice.

Si les corps m et m' pouvaient se mouvoir indépendamment l'un de l'autre, leurs forces respectives, en ayant égard au frottement, seraient donc,

Pour le premier, $g\,\frac{d\zeta}{ds} - f\left(g\,\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{u^2}{r}\right)$;

Et pour le second, $g\,\frac{d\zeta'}{ds'} - f\left(g\,\frac{d\sigma'}{ds'} \pm \frac{u'^2}{r'}\right)$.

Mais, à cause de leur dépendance mutuelle, on a $u = u'$; et par

conséquent, pour déterminer leur force accélératrice commune φ,

$$m\left[g\frac{dz}{ds}-f.\left(g\frac{d\sigma}{ds}\pm\frac{u^2}{r}\right)-\varphi\right]+m'\left[g\frac{dz'}{ds'}-f.\left(g\frac{d\sigma'}{ds'}\pm\frac{u^2}{r'}\right)-\varphi\right]=0;$$

d'où l'on tire

$$\varphi=\frac{1}{m+m'}\left[g\left(\frac{mdz}{ds}+\frac{m'dz'}{ds'}\right)-fg\left(\frac{md\sigma}{ds}+\frac{m'd\sigma'}{ds'}\right)\mp f\left(\frac{mu^2}{r}+\frac{m'u^2}{r'}\right)\right].$$

44. EN GÉNÉRAL, les corps m, m', m'', &c. étant supposés égaux à dM, et proportionnels aux élémens des courbes à double courbure qu'ils décrivent, on aura

$$\varphi=\frac{1}{\int dM+A}\left[g(\int dz+B)-gf(\int d\sigma+C)\mp f(\int\frac{u^2ds}{r}+D)\right].$$

Or il est évident que l'intégrale $\int d\sigma=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sigma$, n'est autre chose que la projection horizontale d'un arc fini de la courbe à double courbure que décrit la chaîne sur la surface donnée. On voit d'ailleurs que $\int\frac{ds}{r}$ est une intégrale connue par l'équation de cette courbe. Faisant donc généralement $\int\frac{ds}{r}=\theta$, l'expression de la force accélératrice précédente, étant rendue complète, deviendra,

$$\varphi=\frac{g(z-z')-fg.(\sigma-\sigma')\mp fu^2(\theta-\theta')}{s-s'},$$

dans laquelle les quantités z, σ, θ, et s; z', σ', θ' et s' correspondent aux chaînons extrêmes de la chaîne en mouvement.

45. ELLE peut encore se mettre sous cette forme plus simple :

$$\varphi=\frac{g\Delta z-fg\Delta\sigma\mp fu^2\Delta\theta}{\Delta s}.$$

Lorsque la chaîne mobile enveloppe la courbe entière, et qu'elle se renouvelle successivement, on a z', σ', θ', et s', égaux à zéro, ce qui donne

$$(\varphi)=\frac{gz-fg\sigma\mp fu^2\theta}{s};$$

équation qui a lieu également soit que la courbe décrite ait une

double courbure, ou qu'elle soit toute entière dans un plan vertical, supposition pour laquelle $\sigma = x$, et $s = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

46. On a eu égard, dans cette expression de la force accélératrice, au frottement résultant de la pression normale sur la courbe matérielle qui soutient la chaîne en mouvement. Mais l'expérience a fait connaître que les mobiles éprouvent encore une autre résistance proportionnelle à une certaine fonction de la vîtesse.

En ayant égard à la résistance proportionnelle au carré de la vîtesse.

47. Si l'on conçoit en effet les aspérités dont les surfaces sont couvertes, comme de petites pointes dures ou élastiques infiniment près les unes des autres, il est clair qu'elles opposeront d'autant plus de résistance au mouvement du corps qui, en les choquant, tend à les plier ou à les rompre, qu'elles seront frappées avec plus de force; c'est-à-dire, que ce corps sera mu avec plus de vîtesse. Il n'est pas moins évident que ce corps éprouvera d'autant plus de résistance dans un instant quelconque, qu'il choquera un plus grand nombre d'aspérités; c'est-à-dire, qu'il parcourra un plus grand espace, ou, ce qui est la même chose, qu'il sera animé d'une vîtesse plus grande.

48. Donc, si l'on appelle q la résistance qu'oppose chacune des aspérités de la surface qui soutient le mobile, au choc de ce mobile, lorsqu'il est animé d'une vîtesse connue V, cette résistance, lorsque la vîtesse $= u$, sera $q\frac{u}{V}$; et par conséquent l'on aura pour la résistance qu'opposent successivement toutes les aspérités choquées dans un instant infiniment petit, pendant lequel la vîtesse reste constante, $q\frac{u^2}{V}$; d'où l'on voit que les corps en mouvement sur une surface matérielle quelconque éprouvent une résistance égale au carré de leur vîtesse, multiplié par un certain coëfficient dépendant de la nature de cette surface et de son degré de poli.

Cela posé, nommant R ce coëfficient, nous aurons pour les

forces dont seraient animés deux corps m et m' sur une surface quelconque, s'ils étaient indépendans l'un de l'autre,

$$g\frac{dz}{ds} - f\left(g\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{u^2}{r}\right) - Ru^2$$

$$\text{et } g\frac{dz'}{ds'} - f\left(g\frac{d\sigma'}{ds'} \pm \frac{u'^2}{r'}\right) - Ru'^2\,;$$

donc, à cause de leur dépendance mutuelle, leur force accélératrice commune étant Φ, on aura l'équation

$$\varphi = \frac{1}{m+m'}\left[g\left(\frac{m\,dz}{ds} + \frac{m'dz'}{ds'}\right) - fg\left(\frac{m\,d\sigma}{ds} + \frac{m'd\sigma'}{ds'}\right) \pm f\left(\frac{mu^2}{r} + \frac{m'u^2}{r'}\right)\right] - Ru^2.$$

Si l'on suppose une suite de chaînons contigus m, m', m'', m''', &c. égaux chacun à dM et proportionnels aux élémens ds, ds', ds'', ds''', &c. de la courbe sur laquelle ils sont appuyés; si l'on observe de plus que les vîtesses u, u', u'', u''', &c. de chacun de ces chaînons sont toutes égales entre elles, on aura généralement pour la force accélératrice

$$\Phi = \frac{1}{\int dM + A}\left[g(\int dz + B) - fg(\int d\sigma + C) \mp f\left(\int \frac{ds}{r}u^2 + D\right)\right] - Ru^2;$$

équation qui devient, après avoir effectué et complété convenablement les intégrales indiquées pour la chaîne, composée d'élémens successifs,

$$\Phi = \frac{gz - fg\sigma \mp fu^2\theta}{s} - Ru^2\,;$$

ou, en supposant la courbe décrite dans un plan vertical,

$$\Phi = \frac{gz - fgx \pm fu^2\theta}{s} - Ru^2.$$

49. On voit que les quantités z, x, s et θ étant constantes pour une courbe déterminée, la force accélératrice Φ sera variable, puisqu'elle est une fonction de la vîtesse u, qui s'accélère de plus en plus, jusqu'à ce qu'elle devienne uniforme.

Pour trouver les circonstances du mouvement dans cette hypothèse, je fais

$$\frac{gz - gfx}{s} = K,$$

$$\mp \frac{f\theta - Rs}{s} = N,$$

et

et j'appelle S la longueur de la chaine qui s'est écoulée sur la courbe pendant le temps t.

Ainsi l'on a les deux formules

$$(K - Nu^2)\,dt = du$$
$$u\,dt = dS.$$

La première donne immédiatement par son intégration,

$$t = \frac{1}{2\sqrt{(KN)}}\,Log.\left(\frac{\sqrt{(K)} + u\sqrt{(N)}}{\sqrt{(K)} - u\sqrt{(N)}}\right);$$

et la seconde après l'élimination de dt,

$$S = A - \frac{1}{2N}\,Log.(K - Nu^2).$$

La constante A se détermine par la condition que S et u soient nuls en même temps; donc $A = \frac{1}{2N}\,Log.\,K$; donc enfin

$$S = \frac{1}{2N}\,Log.\left(\frac{K}{K - Nu^2}\right);$$

équations au moyen desquelles il est aisé d'assigner les circonstances du mouvement de la chaîne à *chaînons successifs* ou de l'écoulement du fluide.

Reprenons la formule générale

$$(\Phi) = \frac{gz - gfx \mp fu^2\theta}{s} - Ru^2,$$

et observons que la vîtesse étant uniforme, et parvenue à son *maximum* lorsque la force accélératrice est nulle, on a, pour déterminer cette vîtesse,

$$\frac{gz - gfx \mp fu^2\theta}{s} - Ru^2 = 0;$$

équation dans laquelle il faut substituer pour f et R leurs valeurs données par l'expérience.

Expression de la vîtesse lorsque la force accélératrice est nulle.

50. S'IL s'agit d'appliquer cette équation au mouvement uniforme d'un fluide dans un canal ou tuyau de conduite, on voit que z représente sa pente entre ses deux extrémités, x ou σ sa projection horizontale, s son développement, enfin θ une certaine fonction des coordonnées de la courbe qu'il affecte. Or toutes

ces quantités sont connues par l'observation : ainsi l'on peut déduire immédiatement de la théorie qui vient d'être exposée, la vîtesse des eaux courantes dans un tuyau de figure déterminée.

51. NOUS venons de voir que la force accélératrice d'une chaîne pesante en mouvement sur une courbe, était

$$\Phi = \frac{g\zeta - fg\sigma \mp fu^2\theta}{s} - Ru^2.$$

La force accélératrice d'une chaîne semblable sur une autre courbe, sera

$$\Phi' = \frac{g\zeta' - fg\sigma' \mp fu'^2\theta'}{s'} - Ru'^2.$$

Expression de cette force, lorsque la chaîne se meut sur deux courbes consécutives.

52. CONSIDÉRONS maintenant ces deux courbes comme placées à la suite l'une de l'autre, de façon que l'extrémité supérieure de la seconde s'applique sur l'extrémité inférieure de la première. Supposons, en outre, que leurs ordonnées z et z' restant toujours verticales, les deux chaînes qu'elles soutiennent soient attachées l'une à l'autre, pour n'en former qu'une seule : il est évident qu'en vertu de leur dépendance mutuelle, leur force accélératrice commune (Φ) sera donnée par l'équation

$$(\Phi) = \frac{\Phi s + \Phi' s'}{s + s'},$$

ou, en substituant pour Φ et Φ', leurs valeurs,

$$(\Phi) = \frac{g(\zeta + \zeta') - gf(\sigma + \sigma') \mp fu^2(\theta + \theta')}{s + s'} - Ru^2.$$

De même si l'on a une troisième courbe contiguë à la seconde,

$$(\Phi) = \frac{g(\zeta + \zeta' + \zeta'') - gf(\sigma + \sigma' + \sigma'') \mp fu^2(\theta + \theta' + \theta'')}{s + s' + s''} - Ru^2.$$

Et, en général, sur un nombre indéterminé de courbes à la suite les unes des autres.

53. ET, en général, comme toutes ces courbes sont indépendantes les unes des autres, on peut supposer

$$\zeta + \zeta' + \zeta'' + \&c. = Z,$$
$$\sigma + \sigma' + \sigma'' + \&c. = \Sigma,$$
$$\theta + \theta' + \theta'' + \&c. = \tau,$$
$$s + s' + s'' + \&c. = S.$$

Ainsi l'on aura généralement

$$(\Phi) = \frac{gZ - gf\Sigma \mp fu\tau}{S} - Ru^2;$$

équation qui exprime la force accélératrice d'une chaîne mobile sur une courbe matérielle composée de courbes consécutives différentes.

54. On pourra donc, en faisant $(\Phi) = 0$, déterminer, au moyen de cette équation, la vîtesse uniforme de l'eau dans un tuyau de conduite quelconque, dont on connaîtra la pente, les sinuosités horizontales, et le développement.

Comment on détermine les coëfficiens R et f.

Quant aux quantités R et f, si, par une suite d'observations, on a

$$\frac{gZ - gf\Sigma \mp fu^2\tau}{S} - Ru^2 = 0,$$

$$\frac{gZ' - gf\Sigma' \mp fu'^2\tau'}{S'} - Ru'^2 = 0,$$

$$\frac{gZ'' - gf\Sigma'' \mp fu''^2\tau''}{S''} - Ru''^2 = 0,$$

&c.

équations où le même nombre d'accens affecte les quantités variables dans chaque observation, et qui donneront autant de valeurs de R et de f que l'on pourra en former de combinaisons deux à deux, il est évident que la matière des tuyaux de conduite, et la pesanteur spécifique du fluide qui y est en mouvement, restant les mêmes, la théorie d'où ces formules ont été déduites, approchera d'autant plus de la vérité, que les valeurs trouvées pour f et pour R, au moyen de ces combinaisons, approcheront plus d'être constantes.

Recherche des Courbes sur lesquelles les Chaînes à chaînons successifs peuvent être mises en mouvement, en ayant égard à la ténacité spécifique de ces chaînes.

La chaîne mobile a été supposée jusqu'ici éminemment tenace.

55. Nous avons supposé jusqu'ici que la chaîne mise en mouvement sur une courbe quelconque, était composée d'une matière

éminemment tenace, telle que la tension qu'elle éprouve en l'un quelconque de ses points, ne pouvait opérer sa rupture.

Le fluide en mouvement a été supposé contenu dans un tuyau de conduite.

56. Et lorsque nous avons comparé le mouvement de cette chaîne à celui d'un fluide dans un tuyau de conduite, nous avons supposé que ce fluide remplissait exactement le tuyau, de telle sorte que l'espèce de chaîne qu'il présente reste nécessairement de forme invariable, pendant la durée de son mouvement.

Condition qui doit avoir lieu pour la permanence de la chaîne dans son état primitif, lorsqu'elle est compressible et extensible.

57. Mais, si la chaîne à chaînons successifs n'a qu'une ténacité finie, il n'y a aussi que certaines courbes sur lesquelles elle peut se mouvoir sans s'alonger ou se contracter en quelque point, puisque cet alongement ou cette contraction est l'effet de la tension ou de la compression dépendante de la courbure de la surface matérielle qui la soutient; d'où il suit que la permanence de la chaîne dans sa forme primitive ne peut exister à moins que le *maximum* de tension ou de compression qu'elle éprouve, ne soit moindre que sa ténacité spécifique.

Comment le cours d'un fluide peut être rendu permanent dans un canal ouvert.

58. De même, si l'on suppose un fluide en mouvement dans un canal ouvert, il se gonflera ou s'affaissera transversalement en quelque point de son cours, à moins que la surface sur laquelle il s'écoule, n'ait, par la disposition de ses élémens, la propriété de produire et de conserver la permanence de ses sections à une hauteur constante. C'est de la détermination de cette surface que nous allons nous occuper.

Recherche de la pression ou de la tension qu'éprouve chacun des chaînons d'une chaîne en mouvement sur une courbe.

59. Afin de ramener cette question à toute la simplicité dont elle est susceptible, je supposerai d'abord qu'une chaîne à chaînons successifs se meuve sur une courbe plane déterminée.

Cela posé, concevons sur cette courbe (*fig. 2*), trois élémens consécutifs, MM', $M'M''$, $M''M'''$; et sur l'extrémité de l'élément intermédiaire $M'M''$, deux chaînons pesans m', m'', retenus entre eux par une verge parallèle à cet élément. La question consiste à rechercher la force avec laquelle ces deux chaînons

tendent à comprimer ou à étendre cette verge parallèlement à sa longueur.

J'observe d'abord que, s'il y avait un point d'appui en M'' qui soutînt le poids du chaînon supérieur, de manière à ce qu'il n'agît plus sur la verge $M' M''$, cette verge serait seulement tirée par le chaînon inférieur m', qui, par l'action de sa gravité, tendrait à l'alonger.

Si, au contraire, le chaînon inférieur m' était retenu en M', le chaînon m'' agirait seul sur la verge, et tendrait à la comprimer.

Mais, parce que ni l'un ni l'autre des chaînons m' et m'' ne sont fixes aux points sur lesquels ils s'appuient actuellement, il est clair que la verge qui les unit se soustrait en partie à la force avec laquelle le chaînon inférieur tend à l'alonger, en cédant à celle avec laquelle le chaînon supérieur tend à la comprimer, et réciproquement. La valeur de son extension ou de sa compression *effective* n'est donc que la différence entre l'extension et la compression *virtuelles* que tendent à produire les chaînons m' et m'' par l'action de leur poids décomposé, suivant la direction de l'élément $M' M''$.

Il ne s'agit donc que de déterminer cette extension et cette compression *virtuelles*. Faisons

L'abscisse $A\ P' = x$;

L'ordonnée verticale $P' M' = z$;

L'arc $C M' = s$;

Le rayon de courbure au point $M' = r$;

Nous aurons

$P'\ P'' = Q' M'' = dx$,

$Q' M' = dz$,

$M' M'' = ds$,

$P'' P''' = Q'' M''' = d\ (x + dx) = dx + ddx$,

$Q'' M'' = d.\ (z + dz) = dz + ddz$,

$M'' M''' = d.\ (s + ds) = ds + dds$;

Enfin le rayon de courbure au point $M'' = r + dr$.

Cherchons d'abord l'extension que tend à produire le chaînon inférieur m'.

Représentons la gravité g par la verticale $M'K$, et décomposons cette force en deux autres $M'h$ et $M'f$, dirigées dans le prolongement de deux côtés $M'M''$ et MM' de la courbe. Il est évident que la première de ces forces multipliée par la masse m' du chaînon inférieur, représentera l'extension cherchée. Or nous avons :

$$g : M'h :: \sin. hM'f = \frac{ds}{r} : \sin. M'Kh = \sin. (Q'M'M'' + fM'M'') = \frac{dx}{ds} + \frac{dz}{r};$$

d'où $M'h = \frac{grdx}{ds^2} + \frac{gdz}{ds}$;

et par conséquent $gm' \left(\frac{rdx}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\right)$ représente le poids tendant à produire l'extension de la verge $M'M''$.

Quant à la compression que tend à produire le chaînon supérieur, il est évident qu'en représentant encore la gravité par la verticale $M''K$, et par $M''h'$ la gravité décomposée parallèlement à $M''M'$, nous aurons pour déterminer cette seconde force,

$$g : M''h' :: \frac{ds + dds}{r + dr} : \sin. Q''M''M''' = \frac{dx + ddx}{ds + dds};$$

d'où $M''h' = g. \left(\frac{dx + ddx}{ds + dds}\right)\left(\frac{r + dr}{ds + dds}\right)$;

et le poids qui représente la compression

$$= gm'' \left(\frac{(dx + ddx)\ (r + dr)}{(ds + dds)^2}\right).$$

Par conséquent, la force $M''h' - M'h = dT$, avec laquelle les chaînons contigus étendent ou compriment la verge qui les unit, a pour expression

$$dT = gm'' \left(\frac{(dx + ddx)\ (r + dr)}{(ds + dds)^2}\right) - gm' \left(\frac{rdx}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\right);$$

ou bien, en faisant $m' = m'' = ds$,

$$dT = gds. \left[\left(\frac{(dx + ddx)\ (r + dr)}{(ds + dds)^2}\right) - \left(\frac{rdx}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\right)\right];$$

laquelle, à cause de

$$\frac{(dx + ddx)(r + dr)}{(ds + dds)^2} - \frac{rdx}{ds^2} = d\left(\frac{rdx}{ds^2}\right),$$

se réduit à celle-ci :

$$dT = gd\left(\frac{rdx}{ds}\right) - gdz;$$

positive ou négative, suivant que la compression par m'' est plus grande ou moindre que l'extension par m'.

60. On voit que dT exprime ici la tension ou la compression *effective*, qu'éprouverait la verge qui joint deux chaînons consécutifs, si ces deux chaînons étaient seuls, ou, ce qui est la même chose, la différentielle de la tension ou de la compression qu'elle éprouve par l'action de tous les chaînons dont la chaîne est composée. Cette tension ou cette compression totale s'obtient donc par l'intégration de la formule précédente, qui donne

$$T + gA = \frac{grdx}{ds} - gz.$$

61. On voit également que la force T variera pour chacun des points de la courbe matérielle, et que, par conséquent, il y aura un point de cette courbe pour laquelle cette force sera un *maximum*, et pourra être représentée par (T'). Cette pression ou cette tension varient d'un point à un autre.

62. Si la ténacité spécifique de la verge qui unit deux chaînons consécutifs, ou plutôt, si la ténacité des chaînons contigus est plus grande que (T'), il est évident que la chaîne ne pourra, en aucun point de sa longueur, être étendue ou comprimée par l'action mutuelle des chaînons les uns sur les autres; et dans ce cas, son mouvement aura lieu sur la courbe donnée, comme si elle était inextensible et incompressible. Équation de la courbe sur laquelle une chaîne en mouvement conserve sa forme primitive.

63. Mais si la ténacité de la chaîne est moindre que (T'), il y aura quelque point de la courbe sur lequel les chaînons correspondans changeront de figure, en se contractant, ou en se

dilatant ; et alors l'état de permanence dans lequel nous l'avions supposée, sera détruit.

64. POUR que cet état de permanence existe, il est donc nécessaire que la chaîne se meuve sur une courbe, telle que chacun de ses chaînons successifs éprouve à chaque instant une tension égale ou proportionnelle à la ténacité spécifique dont il est doué.

Ainsi nommant t cette ténacité spécifique sous l'unité de masse, celle de la verge ds qui joint deux chaînons consécutifs, aura pour expression tds ; et, parce qu'on doit avoir $dT = tds$, l'équation de la courbe cherchée sera généralement

$$tds = d.\left(\frac{grdx}{ds}\right) - gdz,$$

qui devient par l'intégration

$$ts + gA = \frac{grdx}{ds} - gz.$$

Ce que devient cette équation, lorsque la ténacité de la chaîne est infiniment petite.

65. SUPPOSONS maintenant la ténacité t infiniment petite, c'est-à-dire, telle que le moindre effort puisse désunir deux chaînons contigus, ce qui est le cas des fluides parfaits; on a alors sensiblement $t = o$, et par conséquent

$$gA = \frac{grdx}{ds} - gz,$$

équation connue de la chaînette dans un plan vertical.

66. LA section par l'axe d'un canal qui contient un fluide en mouvement, doit donc présenter une courbe funiculaire, pour qu'il n'existe à la surface de ce fluide ni intumescence ni dépression ; c'est-à-dire, pour que cette surface soit exactement parallèle au fond du canal, et que l'écoulement soit stable (1).

Phénomène qui se manifeste à la surface d'un fluide, lorsque le fond du canal où il coule, n'est point *lintéaire*.

67. LORSQUE l'intersection du fond du canal, par un plan vertical, n'est point une chaînette, ou plus généralement, lorsque

(1) Le C.[en] *Monge*, dans un mémoire *sur quelques effets d'attraction et de répulsion apparentes entre les molécules de matière*, inséré parmi ceux de l'Académie des sciences pour 1787, a déjà fait voir que la surface d'un fluide peut, dans certains cas, rester en équilibre, en affectant la courbure d'une lintéaire.

ce

ce fond n'est point une surface lintéaire, la superficie du fluide se tuméfie et se déprime en différens points par une suite nécessaire de l'inégalité des pressions auxquelles sont soumises ses tranches transversales, qui représentent ici les élémens d'une chaîne douée d'une flexibilité parfaite.

68. TELLE est la cause des ondulations et des rides qu'on remarque sur la surface d'une eau courante dont le lit n'est point réglé, lorsque ces ondulations ne sont produites ni par l'agitation de l'air, ni par l'application d'une autre force apparente.

69. NOUS avons supposé jusqu'ici que la directrice du fond du canal était une courbe plane. Si l'on devait tracer cette directrice sur une surface donnée, il faudrait décomposer le poids de chaque tranche élémentaire du fluide en mouvement, dans le plan de deux élémens consécutifs de la courbe cherchée ; considérant ensuite que cette tranche ne peut conserver une forme constante qu'autant qu'elle est sollicitée également à se comprimer ou à s'étendre par l'action du fluide contigu, on parviendrait à l'équation de la courbe funiculaire à double courbure, qu'affecterait librement une chaîne pesante dont les extrémités seraient fixes sur une surface quelconque.

Comment on détermine la courbe génératrice du fond d'un canal ouvert, tracé sur une surface donnée.

70. D'après tout ce qui précède, on voit que l'égalité de pression sur une tranche quelconque d'un fluide en mouvement par deux tranches contiguës, constitue la stabilité de l'écoulement du fluide, de même que l'égalité de pression qui a lieu sur les joints de lit de chacun des voussoirs qui composent une voûte, constitue l'équilibre de cette voûte. Voilà pourquoi la même courbe représente la loi suivant laquelle on doit disposer les tranches élémentaires d'un fluide et les tranches élémentaires d'une voûte, pour établir la stabilité de l'écoulement de l'un et l'équilibre de l'autre ; avec cette différence, que la courbe dont il s'agit présente, dans l'un ou l'autre cas, sa concavité ou sa convexité à une même droite horizontale.

Analogie entre l'écoulement stable d'un fluide et l'équilibre d'une voûte.

Position constante du centre de gravité d'une masse fluide dont l'écoulement est stable.

71. PUISQUE les eaux qui coulent à la surface de la terre, tendent sans cesse à régler les dimensions et la courbure de leur lit de manière à ce que leur écoulement acquière de la stabilité, il est évident qu'un courant quelconque, dont les extrémités sont fixes, passe successivement par différens états, dans chacun desquels son centre de gravité descend de plus en plus, jusqu'à ce qu'il soit le plus bas possible. Or la propriété d'avoir leur centre de gravité le plus bas possible, caractérise essentiellement les courbes funiculaires : donc l'axe d'un courant parvenu à un écoulement stable doit avoir pour axe une courbe de cette famille ; conséquence déduite des notions fondamentales de la statique, et qui confirme le résultat que nous a fourni la théorie développée dans ce mémoire.

Cas auquel la quantité d'eau d'un courant augmente ou diminue.

72. QUOIQUE nous ayons supposé jusqu'ici que la même quantité d'eau passait à chaque instant par les sections consécutives du canal, depuis son origine jusqu'à son embouchure, cependant cette théorie s'applique au cas où le volume du courant augmente ou diminue, suivant une certaine loi, soit qu'il reçoive des affluens, soit qu'on dérive par des saignées une partie de ses eaux, ou qu'il les perde par des filtrations. Il convient d'observer seulement que la courbe d'*écoulement stable*, dans cette hypothèse, n'est plus celle qu'affecterait une chaîne pesante de grosseur uniforme, mais une funiculaire dont les élémens varieraient entre ses extrémités comme les sections du courant dont il s'agit.

Lieu qu'occupe un fleuve *permanent* sur la surface terrestre.

73. IL suit de là que les fleuves, et, en général, tous les courans d'eau qui sillonnent librement la surface du globe et dont le lit est permanent, occupent sur cette surface le même lieu qu'y occuperait une chaîne pesante abandonnée à sa gravité, et assujettie à passer par la source et l'embouchure de ces courans ; or l'équation générale de l'équilibre de cette chaîne est donnée par les lois de la statique : on déterminerait donc rigoureusement la courbe des fleuves, si l'on pouvait combiner cette équation avec celle qui exprimerait la loi de variabilité de leurs sections transversales, et

celle de la portion de la surface terrestre sur laquelle leur lit est creusé.

74. Si, malgré les aspérités du globe, les eaux s'écoulent en décrivant les mêmes courbes qu'affecteraient des chaînes pesantes qui se plieraient librement sur la surface terrestre, supposée parfaitement polie, c'est parce que le frottement des eaux courantes sur les surfaces les plus dures s'anéantit, en quelque sorte, par la mobilité extrême de leurs molécules et la flexibilité de leurs filets élémentaires.

75. Lorsqu'une chaîne pesante est soutenue sur plusieurs points fixes entre ses deux extrémités, elle présente une suite de funiculaires contiguës, tellement disposées entre elles, que les tensions de part et d'autre d'un même point d'appui sont égales.

Funiculaires contiguës, lorsque le fleuve est traversé par des barrages.

76. De même un fleuve ou un courant quelconque, dont le lit est traversé par des obstacles que l'action des eaux ne peut détruire, s'appuie sur ces obstacles comme sur des points fixes, et présente, lorsque son régime est permanent, une suite de funiculaires qui se font réciproquement équilibre : ainsi la question de la stabilité des fleuves se trouve ramenée à une question de mécanique analytique.

77. Connaissant la loi générale suivant laquelle les eaux en mouvement tendent à établir le régime permanent de leur lit, on peut déterminer avec quelque certitude les changemens ultérieurs que des modifications quelconques dans les dimensions de ce lit apporteront à son régime ; question importante, dont l'art des constructions hydrauliques réclame continuellement la solution.

78. Nous n'avons pas besoin de dire que, dans la recherche des courbes d'*écoulement stable* à la surface de la terre, il faut supposer les directions de la pesanteur constamment perpendiculaires à cette surface, et par conséquent convergentes entre elles, lorsque ces courbes se développent sur un arc terrestre de plusieurs degrés ; supposition qui ne change point l'équation de la courbe,

Considération du cas où le cours d'un fleuve embrasse un arc terrestre de plusieurs degrés.

si on la rapporte à un rayon vecteur, et à l'arc de cercle décrit du centre des pesanteurs par l'extrémité de ce rayon.

Différences notables entre les pentes uniformes et les pentes variables, comme les ordonnées d'une funiculaire.

79. On serait porté à croire, au premier aperçu, que les courbes d'*écoulement stable*, ayant toujours leurs ordonnées verticales très-petites par rapport à leurs abscisses, devraient se confondre sensiblement avec toute autre courbe qui ne jouirait pas de la même propriété, ou même avec une ligne droite terminée aux mêmes points; ce qui, en rendant à-peu-près indifférente la loi suivant laquelle on doit régler la pente des canaux, déterminerait naturellement à adopter la plus simple, c'est-à-dire, à établir un rapport constant entre les pentes et les longueurs correspondantes d'un même lit, ainsi qu'on l'a fait jusqu'à présent.

80. Cependant, si l'on conçoit une courbe funiculaire et sa sous-tendante tracées entre deux points donnés, à quelque distance que l'on suppose ces deux points, il sera aisé de reconnaître, par une application numérique, qu'il existe une différence plus ou moins sensible entre les ordonnées verticales de ces deux lignes correspondantes à la même abscisse; ce qui doit nécessairement en produire une dans le régime de deux canaux de même longueur, dont on aurait réglé le lit primitivement en prenant la funiculaire ou sa sous-tendante pour directrices: d'où il suit qu'il est toujours avantageux de distribuer les pentes conformément à la théorie.

Application numérique au canal de l'Ourcq.

81. Faisant, par exemple, cette application numérique au canal de l'Ourcq, dont le développement est de 96 kilomètres, et la pente totale de $10^{m}.14$, on trouvera qu'en la distribuant uniformément, elle serait de 0.211 pour chaque intervalle de deux kilomètres; tandis qu'en la distribuant suivant le rapport des ordonnées aux abscisses d'une funiculaire, elle serait de 0.42 sur les deux premiers kilomètres, à partir de la prise d'eau, et de 0.004 sur les deux derniers à l'embouchure du canal; c'est-à-dire, double de la pente uniforme à la première de ces extrémités, et environ cinquante fois moindre à la seconde.

82. Nous joignons à ce Mémoire, *pag. 43*, un tableau comparatif des hauteurs du fond de ce canal au-dessus d'un plan parallèle à l'horizon, à son extrémité inférieure ; ces hauteurs étant prises à la même distance de cette extrémité dans les deux hypothèses, on voit qu'il existe entre elles des différences considérables.

Nous allons maintenant déterminer l'action qu'exerce une eau courante contre le fond et les parois de son lit.

De l'Action qu'exerce une Eau courante contre le fond et les parois de son lit.

83. Pour se former une idée exacte de l'action dont il s'agit, il faut remarquer qu'elle est précisément semblable à celle qu'exerce une lime en mouvement sur une substance quelconque. Comment il faut considérer l'action d'un courant contre les parois de son lit.

Or cette action, mesurée par l'effet qu'elle produit, est évidemment d'autant plus énergique, qu'on appuie la lime avec plus de force et qu'on la fait mouvoir avec plus de vîtesse.

Ainsi nommant P la pression de la lime sur la substance contre laquelle elle agit, et u la vîtesse qui lui est imprimée, sa quantité d'action sera $Pu = Q$.

Faisant donc la masse d'une tranche verticale de fluide en mouvement $= Mds$,

Sa vîtesse $= u$,

L'ordonnée verticale de la courbe du fond du lit au point occupé par la tranche $= z$,

L'abscisse correspondante $= x$,

L'arc de la courbe compris entre l'origine des coordonnées et le lieu de la tranche $= s$,

Enfin le rayon osculateur au même point $= r$,

La pression de la tranche fluide que l'on considère, sera

$$Mds\left(\frac{u^2}{r} + \frac{gdx}{ds}\right),$$

et par conséquent sa quantité d'action $Qds = Muds\left(\frac{u^2}{r} + \frac{gdx}{ds}\right)$.

Expression de cette action sur le fond d'un lit funiculaire en un point quelconque.

84. LORSQU'ON applique cette formule à déterminer la pression qui a lieu dans un plan vertical sur le fond d'un lit funiculaire, il faut substituer à la place de r sa valeur déduite de l'équation de la chaînette (art. 65)

$$A = \frac{r dx}{ds} - z,$$

ce qui donne

$$\frac{u^2}{r} + \frac{g dx}{ds} = \frac{u^2 dx}{(A+z)\, ds} + \frac{g dx}{ds};$$

donc,

$$Q = Mu\left[\frac{dx}{ds}\left(\frac{u^2}{A+z} + g\right)\right];$$

formule dans laquelle il ne s'agit plus que de mettre pour A sa valeur en fonction de la longueur de la funiculaire et de ses ordonnées.

Si l'on se rappelle qu'en supposant constant l'élément de la courbe, on a pour le rayon osculateur $r = -\frac{ds\ dz}{ddx}$, l'équation $A = \frac{r dx}{ds} - z$ deviendra

$$A = -\frac{dz\ dx}{ddx} - z,$$

laquelle donne, par son intégration,

$$Log.\ dx + Log.\ (A+z) = Log.\ B ds;$$

d'où l'on tire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{[(A+z)^2 - B^2]}}{\pm B}.$$

Supposons l'origine des coordonnées au point où l'axe des abscisses est tangent à la courbe, nous aurons en ce point $\frac{dz}{dx} = 0$, et $z = 0$; ce qui donne $A = B$, et par conséquent

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{(2Az + zz)}}{\mp A},$$

d'où

$$\sqrt{(dx^2 + dz^2)} = \frac{(z+A)\, dz}{\sqrt{(2Az + zz)}};$$

équation qui, étant intégrée, devient

$$s = \sqrt{(2Az + zz)} + C.$$

La constante C est nulle, parce que s et z s'évanouissent en même temps. On voit de plus, que cette intégrale est complète, lorsque s exprime la longueur totale de la courbe, et z celle de la plus grande ordonnée. Faisant donc $s = S$, et $z = b$, nous aurons

$$S = \sqrt{(2Ab + bb)},$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{SS - bb}{2b}.$$

Cette valeur de A substituée dans l'expression de Q, trouvée plus haut, la change en celle-ci:

$$Q = Mu \left[\frac{dx}{ds} \left(\frac{2bu^2}{SS - bb + 2bz} + g \right) \right].$$

Soit $u^2 = 2gh$; h étant la hauteur due à la vîtesse, on aura

$$Q = Mu \frac{gdx}{ds} \left(\frac{4hb}{SS - bb + 2bz} + 1 \right);$$

ou bien encore, en substituant pour $\frac{dx}{ds}$ sa valeur $\frac{A}{A + z}$,

$$Q = Mug. \left(\frac{SS - bb}{SS - bb + 2bz} \right) \left(\frac{4hb}{SS - bb + 2bz} + 1 \right).$$

85. Dans les cas ordinaires, la pente des fleuves peut être considérée comme très-petite par rapport à leur longueur; ce qui donne sensiblement $bb = 0$, $2bz = 0$, et réduit l'équation précédente à celle-ci:

$$Q = Mug; \text{ d'où l'on tire } \frac{Q\,ds}{u} = Mgds,$$

qui indique que la pression sur le fond du lit, en un point quelconque, est égale au poids $Mgds$ de la tranche élémentaire du fluide correspondante en ce point. Or le poids de cette tranche est exprimé par le produit de sa pesanteur spécifique π, de sa largeur L, de sa hauteur verticale H, et de son épaisseur ds; on a donc

$$\frac{Q\ ds}{u} = \pi LHds.$$

Elle est proportionnelle à la hauteur du fluide en ce point.

86. SUPPOSANT constantes la largeur L du canal et la vîtesse u du courant, il est évident que la pression, et par conséquent l'action corrosive exercée sur le fond en un point quelconque, sont proportionnelles à la hauteur H du fluide en ce point. Or, quand le fond du canal est une surface lintéaire, la hauteur H est partout la même : donc ce fond éprouve par-tout la même pression ; donc il est permanent en cet état, puisqu'il ne peut être corrodé en un point plutôt qu'en un autre.

87. EN GÉNÉRAL, si la courbure du fond du lit est infiniment petite, l'équation de l'art. 83

$$Q\,ds = Mu\,ds\left(\frac{u^2}{r} + \frac{g\,dx}{ds}\right)$$

se réduira toujours à celle-ci,

$$\frac{Q\,ds}{u} = \pi\,L\,H\,ds,$$

parce que, dans cette hypothèse, r est infini, et $dx = ds$; d'où l'on voit que chaque point du lit est pressé comme si le fluide était stagnant. Mais lorsque le fond de ce lit présente toute autre surface qu'une lintéaire, la hauteur du fluide est variable dans chacune de ses tranches élémentaires, la pression qu'il exerce sur le fond est inégale, et le lit est corrodé jusqu'à ce que, devenu lintéaire par l'action continuelle du courant, l'égalité de pression s'établisse sur tous ses points; ce qui détermine enfin sa *permanence*.

Cause de l'élargissement du lit des fleuves à leur embouchure.

88. TOUT ce que nous avons dit jusqu'ici, s'applique au cas où le sol dans lequel le lit est creusé, a par-tout la même consistance, et où ce lit conserve une forme prismatique; mais si l'on suppose cette consistance variable, il est clair que la permanence ne pourra s'établir, à moins qu'il n'y ait équilibre en un point quelconque entre l'action corrosive du courant et la ténacité du sol. Or cette action corrosive est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à la profondeur du courant : cette profondeur doit donc être aussi proportionnelle à la ténacité; et comme la même quantité de fluide doit s'écouler à chaque instant par chacune des sections

sections du canal, il faut nécessairement qu'il s'élargisse là où sa profondeur est moindre, c'est-à-dire, là où le sol a moins de consistance. Voilà pourquoi la plupart des fleuves deviennent plus larges et moins profonds à leur embouchure, où leur lit est ordinairement établi sur des atterrissemens peu solides, ou souvent même à travers des bancs de sable.

89. CECI nous conduit à rechercher l'action du courant contre les parois latérales de son lit.

Action d'un courant contre ses parois latérales.

Supposons que la section de ces parois par un plan horizontal soit une courbe quelconque. Nommons x, y ses coordonnées, s l'arc correspondant, r son rayon de courbure, ϖ la pesanteur spécifique de l'eau, H sa hauteur au-dessus de la section horizontale que nous considérons, u la vîtesse du courant.

Il est évident que la pression totale exercée en un point quelconque de cette courbe par le fluide en mouvement, se compose,

1.° De la pression qu'il exercerait s'il était stagnant,

2.° De la pression résultante de sa force centrifuge.

La première est, comme on sait, exprimée par $\varpi\ H\ ds$.

Quant à la seconde, il est évident qu'elle est égale au produit de la masse $\frac{\pi H\ ds}{g}$ par la force centrifuge $\frac{u^2}{r}$.

Ainsi l'action corrosive $Q\,ds$, exercée contre un point quelconque de la paroi, est donnée par l'équation

$$Q ds = u ds \left(\varpi H \pm \frac{\pi H u^2}{rg}\right),$$

et la pression contre ce point

$$\frac{Q}{u} = \varpi H \pm \frac{\pi H u^2}{rg},$$

selon que la courbe des parois est concave ou convexe.

90. REMARQUONS, avant d'aller plus loin, que, quelle que soit la nature de cette courbe, si les deux parois sont parallèles, et

que l'on nomme $\frac{Q}{u}$ et $\frac{Q'}{u}$ les pressions qui ont lieu en même temps sur l'une et sur l'autre aux deux points opposés, leur somme $\frac{Q}{u}+\frac{Q'}{u}$ sera toujours constante et égale à $2\pi H$, ou, ce qui revient au même, égale à la pression qu'exercerait ce même courant contre ses deux parois supposées rectilignes et parallèles.

Condition de la stabilité de ces parois.

91. La condition de la stabilité des parois exige que la force corrosive Q soit moindre que la ténacité du sol τ; c'est-à-dire, que l'on ait toujours $\tau > Q$.

Ainsi, la quantité τ étant donnée en un point quelconque de la paroi concave d'un canal curviligne en fonction des coordonnées de la courbe qu'il affecte, cette courbe ne subira aucune altération tant que l'on aura

$$\tau ds > \pi H.u ds\left(\frac{u^2}{r}+1\right),$$

et le sol pourra être regardé comme inattaquable. Mais à mesure que la quantité $\pi H\left(\frac{u^2}{rg}+1\right)$ devient plus grande, τ restant le même, la résistance du sol et l'action corrosive du courant approchent de l'état d'équilibre exprimé par l'équation

$$\tau = \pi H u\left(\frac{u^2}{rg}+1\right),$$

laquelle appartient à une courbe qui sert en quelque sorte de limite aux courbes d'*écoulement stable* entre des parois curvilignes.

Cas où les eaux en mouvement exercent la moindre action possible contre les parois de leur lit.

92. On voit qu'en regardant la vîtesse u comme uniforme le long de la paroi, la valeur de τ se compose toujours d'un terme variable $\frac{\pi H u^3}{rg}$, et d'un terme constant $\pi H u$.

Les variations de τ influent donc seulement sur le terme $\frac{\pi H u^3}{rg}$; d'où il suit qu'en supposant la ténacité du sol la moindre possible, il faut que l'on ait $\frac{\pi H u^3}{rg}=0$; ce qui a lieu lorsque $r=$ infini,

ou lorsque la section horizontale de la paroi est une droite perpendiculaire à la direction du courant.

On a dans cette hypothèse $\frac{\tau}{u} = \pi H$; et la pression du fluide en mouvement contre les rives du canal qui le contient, est égale à celle qu'il exercerait s'il était en repos, c'est-à-dire, la moindre de celle qu'il peut produire à une profondeur donnée.

93. On tire des propositions qui précèdent, cette conclusion importante : que l'action d'un courant contre ses parois latérales diminue comme leur courbure, et que cette action est réduite à la moindre quantité possible, lorsque ses deux rives sont rectilignes et parallèles. Ces parois doivent être rectilignes et parallèles.

94. Or, comme on ne peut apprécier au juste la ténacité du sol dans lequel un canal artificiel doit être creusé, ni par conséquent déterminer rigoureusement la courbe de ses parois latérales, pour qu'il y ait équilibre entre cette ténacité et l'action corrosive du courant ; et cependant, comme il importe de donner à ce canal une direction telle qu'elle éprouve les moindres changemens possibles, il s'ensuit qu'il y aura d'autant plus de chances en faveur de la stabilité de cette direction qu'elle sera moins sinueuse, et qu'en général il convient de tracer en ligne droite les canaux artificiels destinés à recevoir des eaux courantes, toutes les fois qu'on peut adopter ce parti sans avoir à vaincre de trop grandes difficultés.

95. Si, dans l'équation de la stabilité latérale Équation de la section horizontale des parois, lorsque leur ténacité est constante.

$$\tau = \pi H u \left(\frac{u^2}{rg} + 1 \right),$$

on suppose la ténacité constante et $= A$, on aura

$$r = \frac{\pi H u^2}{(A - \pi H u)} = constante\,;$$

donc alors la courbe cherchée est un arc de cercle.

96. Mais, si la ténacité du sol varie comme une fonction Équation de cette section, lorsque cette ténacité est variable.

quelconque des coordonnées de la courbe cherchée, on aura $\tau = F.\ (x, y)$, et par conséquent

$$\frac{u^2}{rg} = \frac{F.\ (x\ y)}{\pi H} - u ;$$

équation générale des courbes élastiques, comme il est aisé de s'en assurer.

Les bornes que nous devons prescrire à ce Mémoire, ne nous permettent pas de pousser plus loin ces recherches. Nous le terminerons par une application de la théorie qu'il contient, à quelques expériences sur le mouvement des eaux dans les tuyaux de conduite.

Application de la Théorie à quelques Expériences.

Application de notre théorie aux expériences du C.en Bossut.

97. Les expériences dont il s'agit, ayant été faites au moyen de tuyaux rectilignes, la force centrifuge de l'eau en mouvement dans ces tuyaux est nulle; ce qui fait disparaître les termes $\theta u^2, \theta' u^2, \theta'' u^2$, de la formule que nous avons trouvée (art. 52), et la réduit à celle-ci :

$$(\Phi) = \frac{g\,(z + z' + z'' + \&c.) - gf.\,(\sigma + \sigma' + \sigma'' + \&c.)}{s + s' + s'' + \&c.} - R u^2,$$

dans laquelle

$z + z' + z'' + \&c.$ représentent la hauteur verticale de l'extrémité supérieure d'un tuyau de conduite au-dessous de son embouchure ;

$\sigma + \sigma' + \sigma'' + \&c.$, sa projection horizontale ;

$s + s' + s'' + \&c.$, son développement ;

u, la vîtesse de l'eau dans le tuyau ;

R et f des coëfficiens constans à déterminer par l'expérience ;

enfin (Φ) la force accélératrice dont le fluide est animé.

Il est manifeste, à la simple inspection de cette formule, que la force accélératrice diminue de plus en plus, à mesure que la vîtesse

augmente, et qu'enfin cette force accélératrice étant devenue infiniment petite ou nulle, la vîtesse est uniforme : on a alors

$$\frac{g(z + z' + z'' + \&c.) - gf.(\sigma + \sigma' + \sigma'' + \&c.)}{s + s' + s'' + \&c.} - Ru^2 = 0;$$

équation entre cette vîtesse et les quantités qui expriment la pente, les sinuosités horizontales, et le développement du tuyau de conduite.

98. Le C.en *Bossut* a rapporté, dans le second volume de son *Hydrodynamique*, une suite d'expériences entreprises par lui, pour reconnaître la loi suivant laquelle les dépenses d'un tuyau de conduite varient sous la même charge, lorsqu'on fait varier sa longueur.

Il fit d'abord adapter au fond d'un réservoir où l'on entretenait l'eau à une hauteur constante, un tuyau horizontal à l'extrémité duquel on recevait le fluide qui s'écoulait.

Ainsi l'on pouvait connaître exactement la dépense du réservoir en un temps donné; et divisant cette dépense en une seconde par la section du tuyau, on avait la vîtesse réelle de l'écoulement.

La simplicité de cet appareil, et des expériences auxquelles il était employé, garantit l'exactitude des résultats.

Pour faire à ces expériences l'application de notre formule, je remarque que l'eau contenue dans le tuyau horizontal est pressée par l'eau du réservoir, précisément de la même manière que si un tuyau vertical de même diamètre que le premier, était substitué au réservoir et entretenu constamment plein à la même hauteur.

Par conséquent, le fluide en mouvement dans les expériences dont il s'agit, peut être regardé comme une chaîne pesante; dont une portion verticale, abandonnée à sa pesanteur, imprime un certain mouvement à la portion horizontale restante.

Dans ce cas particulier, z, z'', z''' &c. $= 0$; σ', σ'', σ''' &c. $= 0$; s'', s''' &c. $= 0$; $\sigma = s$, $z' = s'$;

Et la formule générale devient

$$\frac{gz' - fgs}{s + z'} - Ru^2 = 0.$$

On a d'abord employé un tuyau de 16 lignes, ou de 36 millimètres de diamètre.

On a fait varier sa longueur de 9^{m}.74 à 58^{m}.47 par cinq différences constantes; ce qui a donné six expériences dans lesquelles la charge est restée de 324 millimètres, et dont chacune a fourni une équation de cette forme :

$$\frac{ga - gfs}{a + s} - Ru^2 = 0.$$

Ces six équations combinées deux à deux, ont donné 15 valeurs de R, et 15 valeurs de f, rapportées dans les 2.e et 3.e colonnes du tableau n.° II.

Conservant toujours les mêmes longueurs, on a ensuite doublé la charge à la tête du tuyau; ce qui a donné six nouvelles équations, et 15 nouvelles valeurs de R et de f, indiquées dans les 5.e et 6.e colonnes.

Enfin, tout restant le même que dans les deux premières séries d'expériences, on a substitué un tuyau de 54 millimètres de diamètre à celui de 36, et sous une charge de 324, et de 649 millimètres : on a obtenu douze résultats formant deux nouvelles séries, dont chacune a fourni 15 valeurs de R et de f, disposées dans les 8.e, 9.e, 11.e et 12.e colonnes du même tableau.

Accord de nos formules avec les conclusions que le C.^{en} *Bossut* a tirées de ses expériences.

99. On voit par la comparaison de toutes les valeurs de R prises dans la même série, qu'elles varient très-peu d'une expérience à l'autre ; observation qui, s'appliquant également aux valeurs de f, prouve évidemment la vérité de la formule d'où ces valeurs sont dérivées, et par conséquent de la théorie qui nous y a conduits.

Le frottement f, occasionné par la pression de l'eau contre les parois du tuyau qui la contient, produit, comme on voit, une résistance beaucoup moindre que celle Ru^2 proportionnelle au carré de la vîtesse d'écoulement.

On peut donc ici négliger le terme fgs de la formule

$$\frac{ga - fgs}{a + s} - Ru^2 = 0.$$

Et parce que la charge d'eau, exprimée par a, peut être regardée, dans toutes les expériences précédentes, comme très-petite par rapport à la longueur s du tuyau, on a sensiblement

$$\frac{ga}{s} - Ru^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{\sqrt{(ga)}}{Rs};$$

c'est-à-dire que la vîtesse d'écoulement par un tuyau horizontal de longueur donnée, est en raison inverse de la racine carrée de cette longueur; conclusion à laquelle le C.[en] *Bossut* était déjà parvenu, en cherchant par une méthode d'interpolation appliquée aux mêmes expériences, « si pour une même hauteur de » réservoir, les dépenses par un tuyau horizontal d'un diamètre » constant, mais de longueur variable, n'étaient point propor- » tionnelles à une certaine puissance de ces longueurs. » (*Hydrodynamique*, tome II, pag. 141.)

100. Les valeurs de R et de f, indiquées dans le tableau n.° II, ont été conclues d'expériences dans lesquelles la charge d'eau et les pentes sont restées les mêmes sous des longueurs différentes. Nous avons rapporté, dans le tableau n.° III, les valeurs de R et de f tirées de quelques expériences de *Dubuat*, dans lesquelles il a fait varier les charges et les pentes sous une même longueur.

Application de notre théorie aux expériences de *Dubuat*.

Le tuyau qu'il a employé avait 27 millimètres de diamètre, sur environ 20 mètres de longueur.

Ces expériences, au nombre de dix, étant combinées deux à deux, au moyen de la formule

$$g\,\frac{(z + z') - fgs}{z + b} - Ru^2 = 0,$$

dans laquelle z exprime la charge d'eau, z' la pente, b la longueur constante du tuyau, et s sa projection horizontale, qui est ici sensiblement égale à b, on a obtenu 36 valeurs de R et de f, très-peu

différentes entre elles : ainsi nos formules reçoivent des expériences de *Dubuat* une nouvelle confirmation.

Loi qui paraît lier ces expériences à celles du C.en *Bossut*.

101. Si l'on compare les valeurs moyennes de R déduites des expériences du C.en *Bossut*, où l'eau s'écoule par un tuyau de 54 millimètres de diamètre, aux valeurs moyennes de R déduites des expériences de *Dubuat*, où l'eau s'écoule par un tuyau d'un diamètre sous-double, on remarque que ces valeurs moyennes sont à très-peu près comme 1 et 4, ou en raison inverse de la superficie de l'orifice des tuyaux.

On ne peut cependant encore tirer de cette observation aucune conclusion générale sur la loi qui lie les variations du diamètre des tuyaux de conduite à celles du coëfficient R, parce que, dans les expériences comparées, on n'a point tenu compte du degré de poli de l'intérieur des différens tuyaux ; circonstance qui a dû nécessairement influer plus ou moins sur le résultat de leur comparaison.

NOTE sur le Tracé de la Chaînette.

SI l'on prend pour origine des coordonnées le point de la chaînette où sa tangente est horizontale, et cette tangente pour axe des abscisses, l'équation finie de cette courbe est, comme on sait (art. 84) :

$$x = \pm A \log. \left(\frac{A + z + \sqrt{(z^2 + 2Az)}}{A} \right).$$

On a aussi, en appelant s l'arc correspondant aux coordonnées x et z (art. 84),

$s = \sqrt{(2Az + zz)}$, ou bien $ss = 2Az + zz$; c'est-à-dire que le rapport entre l'arc et l'ordonnée de la chaînette est le même que celui entre l'ordonnée et l'abscisse de l'hyperbole équilatère rapportée à son second axe.

Mais lorsque la longueur de la chaînette est très-grande par rapport à son ordonnée verticale, l'abcisse x diffère infiniment peu de l'arc s correspondant ; on a donc, à cause de $x = s$,

$$x = \sqrt{(2Az + zz)} \text{ et } A = \frac{xx - zz}{2z},$$

d'où l'on tire

$$z = -A + \sqrt{(A^2 + xx)}.$$

Pour déterminer la constante A qui convient au cas particulier du canal de l'Ourcq, il faut se rappeler que sa longueur développée est de 96,000 mètres, et sa pente totale de $10^{m},140$, ce qui donne

$$A = \frac{(96000)^2 - (10,14)^2}{2(10,14)} = 454437864.752485;$$

et par conséquent

$$z = -454437864.752485 + \sqrt{(206513772920797848.71 + x^2)},$$

formule au moyen de laquelle on trouve, en faisant successivement $x = 0$, $x = 1000$, $x = 2000$ $x = 3000$, &c. les valeurs de z correspondantes à chaque kilomètre, à partir de l'extrémité inférieure de ce canal.

Si l'on appelle Z une ordonnée verticale quelconque de la ligne droite menée par les deux extrémités de la chaînette, on aura pour le cas particulier du canal de l'Ourcq,

$$Z = \frac{x. (10,140)}{96,000}.$$

Nous avons disposé dans les 3.ᵉ et 5.ᵉ, 9.ᵉ et 11.ᵉ colonnes du tableau n.° I, les valeurs de z et de Z correspondantes à la même abscisse ; et dans les 6.ᵉ et 12.ᵉ colonnes, les différences entre les ordonnées verticales de la chaînette et de sa sous-tendante : ce qui offre le moyen de comparer immédiatement les hauteurs du fond du canal de l'Ourcq dans les deux systèmes de distribution de pentes.

Tableau n.° I. *Distribution des pentes du canal de l'Ourcq, suivant les ordonnées d'une* Funiculaire *et de sa sous-tendante.*

Formules générales. $\left\{ \begin{array}{l} z = -A + \sqrt{(A^2 + x^2)}, \\ Z = \dfrac{x\,(10,\,14)}{96000}. \end{array} \right.$

Valeurs de x.	Valeurs de $\sqrt{(A^2 + x^2)}$.	Valeurs de z.	Différences 1.res	Valeurs de Z.	Valeurs de $Z - z$.
0,000.	454437864.752485.	0.000000.		0.000000.	0.000000.
1,000.	454437864.753585.	0.001101.	0.001101.	0.105625.	0.104524.
2,000.	864.756880.	0.004395.	0.003294.	0.211250.	0.206851.
3,000.	762387.	0.009902.	0.005507.	0.316875.	0.306973.
4,000.	770089.	0.017604.	0.007702.	0.422500.	0.404896.
5,000.	779991.	0.027506.	0.009902.	0.528125.	0.500619.
6,000.	792094.	0.039609.	0.012103.	0.633750.	0.594141.
7,000.	806398.	0.053913.	0.014304.	0.739375.	0.685462.
8,000.	822902.	0.070417.	0.016504.	0.845000.	0.774583.
9,000.	841606.	0.089121.	0.018704.	0.950625.	0.861504.
10,000.	862511.	0.110026.	0.020905.	1.056250.	0.946224.
11,000.	885ɢ617.	0.133132.	0.023106.	1.161875.	1.028743.
12,000.	910922.	ċ.158437.	0.025305.	1.267500.	1.009063.
13,000.	938429.	0.185944.	0.027507.	1.373125.	1.187181.
14,000.	968136.	0.215651.	0.029707.	1.478750.	1.263099.
15,000.	865.000044.	0.247559.	0.031908.	1.584375.	1.336816.
16,000.	034152.	0.281667.	0.034108.	1.690000.	1.408333.
17,000.	070460.	0.317975.	0.036308.	1.795625.	1.477650.
18,000.	108969.	0.356484.	0.038509.	1.901250.	1.544766.
19,000.	149679.	0.397194.	0.040710.	2.006875.	1.609681.
20,000.	192589.	0.440104.	0.042910.	2.112500.	1.672396.
21,000.	237700.	0.485215.	0.045111.	2.218125.	1.734910.
22,000.	285011.	0.532526.	0.047311.	2.323750.	1.791224.
23,000.	334523.	0.582038.	0.049512.	2.429375.	1.847337.
24,000.	386235.	0.633750.	0.051712.	2.535000.	1.901250.
25,000.	440148.	0.687663.	0.053913.	2.640625.	1.952962.
26,000.	496261.	0.743776.	0.056113.	2.746250.	2.002474.
27,000.	554575.	0.802090.	0.058314.	2.851875.	2.049785.
28,000.	615089.	0.862604.	0.060514.	2.957500.	2.094896.
29,000.	677804.	0.925319.	0.062715.	3.063125.	2.137806.
30,000.	742719.	0.990234.	0.064915.	3.168750.	2.178516.
31,000.	809835.	1.057350.	0.067116.	3.274375.	2.267025.
32,000.	879151.	1.126666.	0.069316.	3.380000.	2.253334.
			0.071517.		

SUITE du TABLEAU n.° I. *Distribution des pentes du canal de l'Ourcq, suivant les ordonnées d'une* Funiculaire *et de sa sous-tendante.*

Formules générales. $\begin{cases} z = -A + \sqrt{(A^2 + x^2)}, \\ Z = \dfrac{x\,(10,\,14)}{96000}. \end{cases}$

Valeurs de *x*.	Valeurs de $\sqrt{(A^2 + x^2)}$.	Valeurs de *z*.	Différences 1.res	Valeurs de Z.	Valeurs de Z — *z*.
33,000.	454437865:950668.	1.198183.	0.073718.	3.485625.	2.287442.
34,000.	866.024386.	1.271901.	0.075908.	3.591250.	2.319349.
35,000.	100304.	1.347819.	0.078118.	3.696875.	2.349056.
36,000.	178422.	1.425937.	0.080320.	3.802500.	2.376563.
37,000.	258742.	1.506257.	0.082520.	3.908125.	2.401868.
38,000.	341262.	1.588777.	0.084720.	4.013750.	2.424973.
39,000.	425982.	1.673497.	0.086920.	4.119375.	2.445878.
40,000.	512902.	1.760417.	0.089121.	4.225000.	2.464583.
41,000.	602023.	1.849538.	0.091321.	4.330625.	2.481087.
42,000.	693344.	1.940859.	0.093523.	4.436250.	2.495391.
43,000.	786867.	2.034382.	0.095722.	4.541875.	2.507493.
44,000.	882589.	2.130104.	0.097924.	4.647500.	2.517396.
45,000.	980513.	2.228028.	0.100123.	4.753125.	2.525097.
46,000.	867.080636.	2.328151.	0.102324.	4.858750.	2.530599.
47,000.	182960.	2.430475.	0.104525.	4.964375.	2.533900.
48,000.	287485.	2.535000.	0.106725.	5.070000.	2.535000.
49,000.	394210.	2.641725.	0.108926.	5.175625.	2.533900.
50,000.	503136.	2.750651.	0.111127.	5.281250.	2.530599.
51,000.	614263.	2.861778.	0.113326.	5.386875.	2.525097.
52,000.	727589.	2.975104.	0.115528.	5.492500.	2.517396.
53,000.	843117.	3.090632.	0.117727.	5.598125.	2.507493.
54,000.	960844.	3.208359.	0.119928.	5.703750.	2.495391.
55,000.	868.080772.	3.328287.	0.122129.	5.809375.	2.481087.
56,000.	202901.	3.450416.	0.124330.	5.915000.	2.464584.
57,000.	327231.	3.574746.	0.126531.	6.020625.	2.445878.
58,000.	453762.	3.701277.	0.128730.	6.126250.	2.424974.
59,000.	582492.	3.830007.	0.130931.	6.231875.	2.401868.
60,000.	713423.	3.960938.	0.133131.	6.337500.	2.376562.
61,000.	846554.	4.094069.	0.135332.	6.443125.	2.349056.
62,000.	981886.	4.229401.	0.137532.	6.548750.	2.319349.
63,000.	869.119418.	4.366933.	0.139733.	6.654375.	2,287442.
64,000.	259151.	4.506666.	0.141933.	6.760000.	2.253334.

SUITE du TABLEAU n.° I. *Distribution des pentes du canal de l'Ourcq, suivant les ordonnées d'une* Funiculaire *et de sa sous-tendante.*

Formules générales. $\begin{cases} z = -A + \sqrt{(A^2 + x^2)}, \\ Z = \frac{x\,(10,14)}{96000}. \end{cases}$

Valeurs de x.	Valeurs de $\sqrt{(A^2 + x^2)}$.	Valeurs de z.	Différences 1.res	Valeurs de Z.	Valeurs de $Z - z$.
65,000.	454437869.401084.	4.648599.	0.144135.	6.865625.	2.217025.
66,000.	869.545219.	4.792734.	0.146334.	6.971250.	2.178516.
67,000.	691553.	4.939068.	0.148536.	7.076875.	2.137806.
68,000.	840089.	5.087604.	0.150741.	7.182500.	2.094896.
69,000.	990830.	5.248345.	0.152931.	7.288125.	2.049785.
70,000.	870.143761.	5.391276.	0.155137.	7.393750.	2.002474.
71,000.	298898.	5.546413.	0.157337.	7.499375.	1.952962.
72,000.	456235.	5.703750.	0.159537.	7.605000.	1.901250.
73,000.	615772.	5.863287.	0.161739.	7.710625.	1.847337.
74,000.	777511.	6.025026.	0.163935.	7.816250.	1.791224.
75,000.	941450.	6.188965.	0.166139.	7.921875.	1.734910.
76,000.	871.107589.	6.355104.	0.168341.	8.027500.	1.672396.
77,000.	275930.	6.523445.	0.170539.	8.133125.	1.609681.
78,000.	446469.	6.693984.	0.172741.	8.238750.	1.544766.
79,000.	619210.	6.866725.	0.174941.	8.344375.	1.477650.
80,000.	794151.	7.041666.	0.177142.	8.450000.	1.408334.
81,000.	971293.	7.218808.	0.179343.	8.555625.	1.336816.
82,000.	872.150636.	7.398151.	0.181543.	8.661250.	1.263099.
83,000.	332179.	7.579694.	0.183744.	8.766875.	1.187181.
84,000.	515923.	7.763438.	0.185943.	8.872500.	1.109062.
85,000.	701866.	7.949381.	0.188145.	8.978125.	1.028743.
86,000.	890011.	8.137526.	0.190346.	9.083750.	0.946224.
87,000.	873.080357.	8.327872.	0.192545.	9.189375.	0.861504.
88,000.	272902.	8.520417.	0.194746.	9.295000.	0.774583.
89,000.	467648.	8.715163.	0.196946.	9.490625.	0.685462.
90,000.	664594.	8.912109.	0.199147.	9.506250.	0.594141.
91,000.	863741.	9.111256.	0.201348.	9.611875.	0.500619.
92,000.	874.065089.	9.312604.	0.203545.	9.717500.	0.404896.
93,000.	268634.	9.516149.	0.205747.	9.823125.	0.306973.
94,000.	474381.	9.721896.	0.207952.	9.928750.	0.206855.
95,000.	682333.	9.929848.	0.210152.	10.034375.	0.104524.
96,000.	892485.	10.140000.		10.140000.	0.000000.



TABLEAU n.° II. Expériences de *Bossut* (Hydrodynamique, *tom. II, pag. 135*).

Mèt. TUYAU DE 0.036 DE DIAMÈTRE.					Mèt. TUYAU DE 0.054 DE DIAMÈTRE.				
COTES des Expériences.	HAUTEUR constante de l'eau dans le réservoir = a.	LONGUEURS variables du tuyau = s.	DÉPENSES par seconde en pouces cubes.	CARRÉ de la vitesse = u^2	COTES des Expériences.	HAUTEUR constante de l'eau dans le réservoir = a.	LONGUEURS variables du tuyau = s.	DÉPENSES par seconde en pouces cubes.	CARRÉ de la vitesse = u^2
A.		9.745.	46.30.	1.27703.	M.		9.745.	128.00.	1.21645.
B.		19.490.	32.62.	0.63375.	N.		19.490.	92.73.	0.63848.
C.	0.324838.	29.235.	26.45.	0.41676.	O.	0.324838.	29.235.	75.57.	0.42397.
D.		38.981.	22.52.	0.30203.	P.		38.981.	65.73.	0.32081.
E.		48.726.	19.63.	0.22963.	Q.		48.726.	58.10.	0.25062.
F.		58.471.	17.53.	0.18313.	R.		58.471.	51.98.	0.20063.
G.		9.745.	67.77.	2.73573.	S.		9.745.	186.98.	2.59586.
H.		19.490.	48.13.	1.38017.	T.		19.490.	136.50.	1.38338.
I.	0.649676.	29.235.	39.20.	0.91540.	U.	0.649676.	29.235.	113.53.	0.95702.
J.		38.981.	33.52.	0.66921.	V.		38.981.	98.08.	0.71428.
K.		48.726.	29.37.	0.51375.	X.		48.726.	87.20.	0.56456.
L.		58.471.	26.38.	0.41467.	Y.		58.471.	78.50.	0.45752.

Suite du Tableau n.° II. Expériences de *Bossut* (Hydrodynamique, *tom. II, pag. 135*).

Formule générale : $\frac{ga - gfs}{a + s} - Ru^2 = 0$.

	Cotes des Expériences comparées.	Valeurs de *R*.	Valeurs de *fg*.		Cotes des Expériences comparées.	Valeurs de *R*.	Valeurs de *fg*.
	A B.	0.241961.	0.007669.		M N.	0.268775.	0.010887.
	A C.	0.242677.	0.006725.		M O.	0.263152.	0.003819.
	A D.	0.241648.	0.008168.		M P.	0.262689.	0.003235.
	A E.	0.240316.	0.009841.		M Q.	0.260345.	0.000291.
	A F.	0.239965.	0.010303.		M R.	0.258202.	0.002402.
	B C.	0.244849.	0.005810.		N O.	0.247611.	0.002843.
Première	B D.	0.240838.	0.008393.	Troisième	N P.	0.251302.	0.004477.
Série	B E.	0.237622.	0.010464.	Série	N Q.	0.247411.	0.002972.
d'Expériences.	B F.	0.237032.	0.010843.	d'Expériences.	N R.	0.243816.	0.005304.
	C D.	0.233194.	0.010721.		O P.	0.259110.	0.002052.
	C E.	0.229166.	0.012419.		O Q.	0.247164.	0.003034.
	C F.	0.229699.	0.012194.		O R.	0.240137.	0.006046.
	D E.	0.222752.	0.013901.		P Q.	0.229635.	0.007457.
	D F.	0.226332.	0.012820.		P R.	0.223816.	0.009339.
	E F.	0.231858.	0.011796.		Q R.	0.215621.	0.010993.
		0.235994.	0.010137.			0.247919.	0.005010.
	G H.	0.219156.	0.014412.		S T.	0.244102.	0.021974.
	G I.	0.219917.	0.012192.		S U.	0.243460.	0.020195.
	G J.	0.219173.	0.014362.		S V.	0.240092.	0.010871.
	G K.	0.218397.	0.017203.		S X.	0.238134.	0.005448.
	G L.	0.218095.	0.017553.		S Y.	0.236101.	0.000318.
	H I.	0.222232.	0.010025.		T U.	0.241554.	0.018330.
Deuxième	H J.	0.219207.	0.014339.	Quatrième	T V.	0.232455.	0.005325.
Série	H K.	0.216638.	0.018003.	Série	T X.	0.228810.	0.000114.
d'Expériences.	H L.	0.216486.	0.018220.	d'Expériences.	T Y.	0.225446.	0.004694.
	I J.	0.213398.	0.018291.		U V.	0.216171.	0.006501.
	I K.	0.210030.	0.021443.		U X.	0.214655.	0.007984.
	I L.	0.211029.	0.020508.		U Y.	0.211353.	0.011214.
	J K.	0.204646.	0.024246.		V X.	0.212176.	0.009402.
	J L.	0.208706.	0.021479.		V Y.	0.206745.	0.013345.
	K L.	0.215125.	0.018791.		X Y.	0.199102.	0.016881.
	Valeur moyenne.	0.216415.	0.017404.			0.226023.	0.010173.



TABLEAU n.° III. Expériences de *Dubuat* (Principes d'Hydraulique, *tom. II, pag. 22*).

COTES des Expériences.	LONGUEUR constante du tuyau = b.	CHARGE d'eau à la tête du tuyau = z	PENTE du tuyau = z'.	SOMME de la charge et de la pente = $z + z'$.	CARRÉ de la vitesse = u^2.
A.		0.004057.	0.003925.	0.007982.	0.001850.
B.		0.013531.	0.012804.	0.026335.	0.009616.
C.		0.113694.	0.107527.	0.221221.	0.079807.
D.		0.160525.	0.147176.	0.307701.	0.129915.
E.		0.210605.	0.197804.	0.408409.	0.167347.
F.	19.95055.	0.242547.	0.226865.	0.469412.	0.202534.
G.		0.333501.	0.311047.	0.644548.	0.292849.
H.		0.370859.	0.346003.	0.716862.	0.322234.
I.		0.391221.	0.368091.	0.763312.	0.350039.
J.		0.641558.	0.593943.	0.235501.	0.602787.

SUITE

Suite du Tableau n.° III.

Formule générale, $g \, \frac{(z + z') - gfb}{z + b} - Ru^2 = 0.$

	Cotes des Expériences comparées.	Valeurs de *R*.	Valeurs de *fg*.
1.re Série.	A B.	1.1606372.	0.0017767.
	A C.	1.3370562.	0.0014502.
	A D.	1.1413532.	0.0018124.
	A E.	1.1770248.	0.0017463.
	A F.	1.1167636.	0.0018579.
	A G.	1.0577593.	0.0019671.
	A H.	1.0678759.	0.0019483.
	A I.	1.0457351.	0.0019893.
	A J.	0.9737037.	0.0021226.
	Moyennes.	1.119763.	0.0018523.
2.e Série.	B C.	1.3564725.	0.0001080.
	B D.	1.1401176.	0.0019744.
	B E.	1.1778251.	0.0016115.
	B F.	1.1150182.	0.0022160.
	B G.	1.0549423.	0.0027942.
	B H.	1.0656122.	0.0026915.
	B I.	1.0431636.	0.0029076.
	B J.	0.9713300.	0.0036141.
	Moyennes.	1.1155600.	0.0022127.
3.e Série.	C D.	0.8386694.	0.0414516.
	C E.	1.0357990.	0.0256296.
	C F.	0.9782827.	0.0302459.
	C G.	0.9570067.	0.0319536.
	C H.	0.9826734.	0.0414721.
	C I.	0.9638136.	0.0314578.
	C J.	0.9210800.	0.0348371.
	Moyennes.	0.9538135.	0.0338639.
4.e Série.	D E.	0.8386694.	0.0414516.
	D F.	1.0738851.	0.0187330.
	D G.	0.9929780.	0.0212434.
	D H.	1.0197852.	0.0177327.
	D I.	0.9911139.	0.0214875.
	D J.	0.9295940.	0.0295442.
	Moyennes.	0.9743376.	0.0250320.
5.e Série.	E F.	0.8358610.	0.0595788.
	E G.	0.9025812.	0.0481584.
	E H.	0.9531334.	0.0396093.
	E I.	0.9288394.	0.0437178.
	E J.	0.8985570.	0.0488390.
	Moyennes.	0.9037944.	0.0479807.
6.e Série.	F G.	0.9283936.	0.0404731.
	F H.	0.9872819.	0.0284013.
	F I.	0.9507917.	0.0358816.
	F J.	0.9039556.	0.0454818.
	Moyennes.	0.9426057.	0.0375594.
7.e Série.	G H.	0.9283936.	0.0404731.
	G I.	0.9858660.	0.0233613.
	G J.	0.8969584.	0.0498330.
	Moyennes.	0.9370727.	0.0378891.
8.e Série.	H I.	0.7943824.	0.0917152.
	H J.	0.8689642.	0.0672353.
	Moyennes.	0.8316733.	0.0794752.
9.e Série.	I. J.	0.8770646.	0.0622004.

Valeurs réduites de $\begin{cases} R = 1.0036910. \\ fg = 0.0254793. \\ f = 0.0025975. \end{cases}$



APPENDICE.

La théorie des eaux courantes, développée dans le Mémoire précédent, est fondée, comme on l'a vu, sur l'analogie que nous avons supposée exister entre un courant d'eau et une chaîne pesante, incompressible et douée d'une flexibilité parfaite; mais comme cette supposition, toute plausible qu'elle paraît, lorsqu'elle a été soumise à un examen approfondi, est cependant de nature à n'être admise généralement qu'autant qu'on aura fait voir l'identité des résultats auxquels elle conduit, avec ceux que fournit la théorie rigoureuse du mouvement des fluides, je me suis occupé de cette recherche, et j'ai pensé qu'on ne verrait pas sans quelque intérêt comment la question que nous avons traitée, présente entre la mécanique des corps solides et celle des fluides, un point de contact qui n'avait point encore été aperçu.

Si l'on appelle

k la densité d'une molécule fluide,

t le temps écoulé depuis le premier instant de son mouvement,

x, y, z, ses trois coordonnées rapportées à trois plans perpendiculaires entre eux,

p la pression qu'elle éprouve,

v, v', v'', les vîtesses de la molécule respectivement parallèles aux trois axes des coordonnées,

X, Y, Z, les trois forces accélératrices qui, en vertu des puissances parallèles à ces trois axes, seraient, à la fin du temps t, imprimées à la molécule, si elle était parfaitement libre,

Φ, Φ', Φ'', les forces accélératrices dont elle est réellement animée parallèlement à ces trois axes,

g la force accélératrice de la pesanteur terrestre;

Si, de plus, on désigne par δp, δx, δy, δz, les différences

contemporaines de pression et de position de deux molécules infiniment voisines;

Et par dx, dy, dz, les différences qui se rapportent à deux positions de la même molécule dans deux instans consécutifs de son mouvement ; on a, comme on sait, pour en déterminer les circonstances, les deux équations

$$\left(\frac{d.\,kv}{dx}\right)+\left(\frac{d.\,kv'}{dy}\right)+\left(\frac{d.\,kv''}{dz}\right)+\left(\frac{dk}{dt}\right)=0,$$

$$\frac{\delta p}{k}=X\delta x+Y\delta y+Z\delta z-(\Phi\delta x+\Phi'\delta y+\Phi''\delta z),$$

qui, dans l'hypothèse de l'incompressibilité, ou de $k = 1$, deviennent (1)

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dv'}{dy}\right)+\left(\frac{dv''}{dz}\right)=0 \ldots\ldots (A),$$

$$\delta p=X\delta x+Y\delta y+Z\delta z-(\Phi\delta x+\Phi'\delta y+\Phi''\delta z) \ldots (B).$$

Supposons l'axe des z vertical, et appliquons ces deux formules au mouvement d'un fluide incompressible et pesant, renfermé dans un tuyau étroit, de courbure quelconque, de grosseur uniforme, et fixe de position dans l'espace ;

Nous aurons d'abord $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$.

Considérant ensuite que chaque molécule est assujettie à se mouvoir parallèlement à la *directrice* du tuyau, on voit que l'équation de continuité

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dv'}{dy}\right)+\left(\frac{dv''}{dz}\right)=0,$$

peut se réduire à cette forme plus simple

$$\left(\frac{du}{ds}\right)=0 \ldots\ldots (a),$$

(1) Voyez deux Mémoires d'*Euler* insérés parmi ceux de l'Académie de Pétersbourg ; l'un de 1756, intitulé *Principia motûs fluidorum* ; l'autre, de 1770, *De Motu fluidorum lineari* ; et la Mécanique philosophique, dont l'auteur, le C.en *Prony*, directeur de l'École des ponts et chaussées, et membre de l'Institut national, a rapproché, avec autant d'ordre que de clarté, toutes les propositions fondamentales de l'hydrodynamique.

dans laquelle *u* représente la vîtesse d'une molécule parallèlement à l'élément *ds* de la courbe du tuyau auquel cette molécule correspond pendant l'instant *dt*.

Considérant encore qu'aux trois termes $\Phi\delta x + \Phi'\delta y + \Phi''\delta z$ de la formule (B), on peut substituer le terme unique $(\Phi)\delta s$ qui représente le moment de la force accélératrice (Φ) parallèle à l'élément de la courbe, cette formule devient

$$\delta p = -g\delta z - (\Phi)\delta s \ldots . \text{ (b)}.$$

Or le premier membre de l'équation $\left(\frac{du}{ds}\right) = 0$ étant la différence partielle de *u* par rapport à *s*, cette équation est identique avec celle-ci $\delta u = 0$, par laquelle on exprime qu'au même instant toutes les molécules se meuvent avec la même vîtesse : cette vîtesse varie donc, seulement d'un instant à l'autre, de la même quantité dans toute l'étendue du fluide, et l'on a généralement, f et f' étant des signes de *fonctions*, suivant la notation de *Lagrange*,

$$u = f(t), \left(\frac{du}{dt}\right) = f'(t) = (\Phi);$$

d'où l'on voit que la force accélératrice (Φ) est aussi seulement fonction du temps, et par conséquent constante au même instant pour toutes les molécules.

Changeant δ en d, et intégrant, d'après cette considération, l'équation (b), elle devient

$$p = g(h - z) - (\Phi)s + F(t),$$

valeur, en termes finis, de la pression d'une molécule en un point quelconque du filet fluide, dans un instant déterminé de son mouvement.

Substituons maintenant, par la pensée, à la chaîne pesante NM (*fig. 1.re*) une masse de fluide renfermée dans un tuyau étroit, ayant pour directrice la courbe $AMNC$; conservons l'origine des coordonnées au point C de cette courbe (art. 34), et faisons $PN = z'$, $CN = s'$, $P'M = z$, $CM = s$: il est clair qu'en

nommant P' et P les pressions qui ont lieu aux extrémités N et M du fluide en mouvement, on a ces deux équations :

$$P' = g\,(h - z') - (\phi)s' + F(t),$$
$$P = g\,(h - z) - (\phi)s + F(t).$$

Mais, parce que la surface du fluide est libre à ses extrémités N et M, les pressions P' et P doivent y être nulles, ce qui donne

$$g\,(h - z') - (\phi)s' + F(t) = 0,$$
$$g\,(h - z) - (\phi)s + F(t) = 0,$$

et enfin

$$(\phi) = g\left(\frac{z - z'}{s - s'}\right) = g\,\frac{\Delta z}{\Delta s},$$

expression de la force accélératrice dont un filet fluide, de longueur constante, est animé dans un tuyau de courbure quelconque ; et comme cette expression est précisément la même que celle de la force accélératrice d'une chaîne pesante sur une courbe matérielle (art. 35), il reste démontré qu'il existe une analogie parfaite entre un filet fluide et une chaîne éminemment flexible, et que la théorie des eaux courantes, déduite de cette analogie, doit conduire aux mêmes résultats que la théorie rigoureuse du mouvement des fluides.

Quoique, en appliquant celle-ci, *Euler* n'ait considéré le mouvement linéaire que dans des tuyaux étroits, il a cependant remarqué que l'on pouvait ramener aux mêmes lois le mouvement des fluides dans des tuyaux d'une certaine amplitude, sans qu'on ait à craindre d'être conduit par le calcul à des conclusions sensiblement différentes des résultats de l'expérience (1). Il est évident, en effet, que les formules précédentes doivent s'appliquer à tous les cas où les vîtesses v, v', v'', et les forces accélératrices ϕ, ϕ', ϕ'', parallèles aux trois axes des coordonnées, peuvent se réduire à la vîtesse u et à la force unique (ϕ), parallèles à la directrice du canal. Or cette condition se trouve évidemment remplie toutes les fois que la longueur de ce canal est très-grande par rapport à son diamètre, c'est-à-dire, dans

(1) *De Motu fluidorum lineari*, cap. 1, schol. 2.

la plupart des fleuves et des canaux creusés à la surface de la terre : observation importante, qui fait rentrer, en quelque sorte, dans le domaine des sciences exactes le mouvement des eaux courantes, dont les phénomènes ont paru jusqu'ici se dérober aux calculs auxquels ils ont été soumis.

Il nous reste maintenant à faire voir comment les formules précédentes, déduites des lois générales de l'hydrodynamique, conduisent à déterminer les courbes que nous avons appelées d'*écoulement stable* (art. 55 et suiv.).

La question consiste à trouver, au moyen de ces formules, la courbe que doit affecter le fond d'un canal rectangulaire, pour que la surface supérieure d'une masse fluide qui coule librement dans ce canal, demeure exactement parallèle à son fond pendant la durée de l'écoulement.

Il est clair que, dans cet état de choses, toutes les molécules dont la masse fluide est composée, décrivent des courbes égales et parallèles entre elles ; il suffit donc de déterminer la courbe décrite par une molécule quelconque.

Or, quelles que soient les circonstances de l'écoulement, l'équation de continuité,

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left(\frac{dv'}{dy}\right) + \left(\frac{dv''}{dz}\right) = 0,$$

pourra toujours se réduire à celle-ci,

$$\left(\frac{du}{ds}\right) = 0,$$

par laquelle on indique que la vîtesse d'une molécule suivant la courbe dont elle décrit un élément dans un instant quelconque, est indépendante du lieu qu'elle occupe sur cette courbe : par conséquent toutes les molécules contiguës qui se trouvent au même instant sur tous les points consécutifs de cette courbe, se meuvent avec la même vîtesse ; le système qu'elles forment peut donc être considéré comme un filet fluide en mouvement dans un tuyau infiniment étroit.

Si donc on suppose que, dans un instant déterminé, ce filet fluide présente une certaine courbe, il présentera dans l'instant suivant, si l'écoulement n'est pas stable, une courbe différente infiniment voisine de la première; de sorte qu'un filet fluide composé d'un nombre constant de molécules qui se meuvent au même instant avec la même vîtesse suivant une certaine courbe, devra être considéré dans deux instans consécutifs, comme mu dans deux tuyaux d'égale longueur, mais de courbures différentes, n'ayant entre elles aucune relation donnée.

Ainsi, nommant p la pression que souffre une molécule quelconque de fluide dans le premier tuyau, et p' celle que souffre une molécule quelconque dans le tuyau varié, les sommes des pressions des mêmes molécules dans deux instans consécutifs, seront respectivement $\int p\,ds$ et $\int p'ds$; la variation de ces pressions totales sera par conséquent

$$\int p\,ds - \int p'ds = \delta \int p\,ds.$$

Mais si, dans deux instans consécutifs, les mêmes molécules continuent de se mouvoir sur la même courbe, c'est-à-dire, si leur écoulement est stable, la variation des pressions qu'elles éprouvent d'un instant à l'autre, est évidemment nulle : on a donc

$$\delta \int p\,ds = 0;$$

équation qui, combinée avec celle-ci, $\delta \int ds = 0$, par laquelle on exprime que l'on prend un nombre constant de molécules dans les tuyaux variés, servira à déterminer la courbe cherchée.

Pour y parvenir, rappelons-nous que la variation des pressions qu'éprouvent au même instant deux molécules fluides contiguës en mouvement dans un tuyau infiniment étroit, donnée par la formule générale

$$\delta p = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z - (\varphi\delta x + \varphi'\delta y + \varphi''\delta z),$$

devient, lorsque le fluide est seulement animé de la pesanteur,

$$\delta p = -g\delta z - (\varphi)\delta s,$$

laquelle, intégrée convenablement après avoir changé δ en d, donne, pour la pression finie d'une molécule quelconque,

$$p = g\,(h - z) - (\Phi)s + F(t).$$

On a donc

$$\int p\,ds = \int [g(h-z) - (\Phi)s + F(t)]\,ds = [gh + F(t)]\,s - \frac{(\Phi)s^2}{2} + B - \int gz\,ds;$$

et comme les termes du second membre de cette équation, hors du signe $\int$, restent les mêmes pour toutes les courbes de même longueur, il s'ensuit que la variation $\delta \int p\,ds$ se réduit à celle de l'intégrale définie $\int gz\,ds$; ainsi l'on a, pour déterminer la courbe d'écoulement stable, les deux équations

$$\delta \int gz\,ds = 0,$$
$$\delta \int ds = 0,$$

qui, conformément aux principes connus de la méthode des variations, se réduisent à celle-ci,

$$\delta \int gz\,ds + C\delta \int ds = 0;$$

d'où l'on tire, par l'application des règles de ce calcul, dans la supposition de dz constant et de $ds = \sqrt{(dx^2 + dz^2)}$

$$- d.\left(\frac{gz\,dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}\right) - Cd.\left(\frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}}\right) = 0,$$

dont l'intégrale

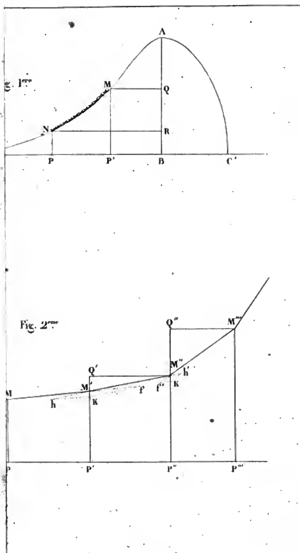
$$\frac{C\,dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}} + \frac{gz\,dx}{\sqrt{(dx^2 + dz^2)}} = \pm D$$

donne enfin, en supposant $\frac{C}{g} = A$ et $\frac{D}{g} = B$,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{[(A+z)^2 - B^2]}}{\pm B},$$

équation différentielle de la chaînette, précisément la même que celle à laquelle nous sommes parvenus (art. 65 et 84) : ainsi la propriété de cette courbe d'être celle d'*écoulement stable*, se conclut immédiatement des lois générales de l'hydrodynamique, comme nous l'avons déduite de la nouvelle théorie développée dans cet Essai.

FIN.



g. 1ère
A
M
Q
N
R
P
P'
B
C'
Fig. 2ème
Q''
M'''
Q'
M''
h'
M
M'
f
f''
K
h
K
P'
P''
P'''


BIBLIOTECA NAZIONALE
NAPOLI

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE.

ERRATA.

PAGE 1, ligne 13, *le régime au fleuve*, lisez *le régime du fleuve*.
Page 10, ligne 20, *sont, comme on sait*, ajouter *dans le cas dont il s'agit*.
Page 26, ligne 10, *doit avoir pour axe*, lisez *pour directrice*.
Page 35, ligne 1, *perpendiculaire*, lisez *parallèle à*.
Page 39, ligne 6, $u = \frac{\sqrt{(ga)}}{Rs}$, lisez $u = \frac{\sqrt{(ga)}}{\sqrt{(Rs)}}$.

En réduisant en mesures nouvelles les résultats numériques des expériences qui forment la première et la seconde série de celles du C.en *Bossut*, il s'est glissé une erreur de calcul qu'il est essentiel de corriger.

Chacune des valeurs de u^2, comprise dans la 5.e colonne du tableau n.° II, *page 46*, doit être divisée par 1.587 pour avoir la véritable expression du carré de la vitesse.

Par la substitution de ces nouvelles valeurs à celles qui ont servi à déterminer le coëfficient R, dans ces deux premières séries, colonne 2.e, *page 47*, on trouve, pour la réduite de ce coëfficient, 0,35 environ, au lieu de 0.22.

IMPRIMÉ

Par les soins de J. J. MARCEL, Directeur de l'Imprimerie de la République.